

Université d'Artois

École doctorale **Sciences, Technologie, Santé - EDSTS**

Unité de recherche **LGI2A**

Thèse présentée par **Yu-Lin HUANG**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université d'Artois

Discipline **Sciences Pour l'Ingénieur**

Spécialité **Génie Informatique et Automatique**

Titre de la thèse

Une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques fondée sur des principes de partitionnement, de sélection et de clonage.

Thèse dirigée par David MERCIER directeur
Frédéric PICHON co-directeur
Gildas MORVAN co-encadrant

Université d'Artois

Doctoral School **Sciences, Technologie, Santé - EDSTS**

University Department **LGI2A**

Thesis defended by **Yu-Lin HUANG**

In order to become Doctor from Université d'Artois

Academic Field **Engineering science**

Speciality **Computer and Automatic Engineering**

Thesis Title

**A new simulation execution policy
based on clustering, selection and
cloning principles.**

Thesis supervised by	David MERCIER	Supervisor
	Frédéric PICHON	Co-Supervisor
	Gildas MORVAN	Co-Monitor

L'Université d'Artois n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions devront être considérées comme propres à leurs auteurs.

Une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques fondée sur des principes de partitionnement, de sélection et de clonage.**Résumé**

Les simulations stochastiques sont utilisées dans de nombreux domaines pour lesquels on ne dispose pas de lois déterministes permettant de prédire l'état futur du système étudié. Les résultats de telles simulations étant par nature variables, il est donc nécessaire de répliquer l'exécution des simulations afin d'obtenir expérimentalement la distribution des événements ou solutions possibles et ainsi estimer leurs probabilités. Dans le cas général, la méthode de Monte-Carlo (MC) est classiquement utilisée. Néanmoins, si les ressources de calcul sont limitées ou si les événements d'intérêt sont rares, MC peut se révéler inefficace.

Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle politique d'exécution de simulation basée sur le partitionnement, la sélection et le clonage de l'état des répliques, dont l'objectif est d'améliorer la qualité des résultats par rapport à MC pour un même coût de calcul tout en restant le plus générique possible. L'idée générale de cette nouvelle politique est de contraindre l'évolution des répliques en sélectionnant et en clonant périodiquement celles pouvant conduire à des résultats intéressants pour le décideur.

La politique proposée est d'abord validée sur des modèles multi-agents académiques simples (modèles proies-prédateurs et de transmission d'un virus), puis expérimentée sur une simulation de transport routier plus complexe. Une extension probabiliste de cette politique est également présentée.

Mots clés : simulation stochastique, simulation multi-agents, exploration de l'espace des solutions, efficacité

A new simulation execution policy based on clustering, selection and cloning principles.**Abstract**

Stochastic simulations are widely used in application domains where no deterministic laws can be used to predict the future state of the system. The results of such simulations being variable by nature, it is then mandatory to replicate the simulation execution in order to retrieve experimentally the distribution of possible events and then obtain their probabilities. In the general case, the Monte-Carlo method is classically used. Nevertheless, if computing resources are limited or targeted events are rare, MC can be inefficient.

In this thesis, we introduce a new simulation execution policy based on the clustering, selection and cloning of replications states, in order to improve the result quality for a fixed computing cost while being as generic as possible. The general idea of this policy is to constraint the evolution of the replications by periodically selecting and cloning those potentially leading to interesting results for the decision maker.

The policy is validated on simple academic agent-based models (prey predator, and virus transmission), then experimented on a more complex traffic simulation. A probabilistic variant of the policy is finally presented.

Keywords: stochastic simulation, multi-agent based simulation, solution space exploration, efficiency

Table des matières

Résumé	vii
Table des matières	ix
Liste des tableaux	xiii
Table des figures	xvii
Introduction	1
 I État de l’art	 5
 1 Modélisation et simulation stochastique	 7
1.1 Introduction	8
1.2 Généralités	8
1.2.1 Estimation de la probabilité d’une solution	9
1.2.2 Cas d’utilisation de simulations stochastiques	10
1.2.3 Génération de nombres pseudo-aléatoires	11
1.3 Méthode de Monte-Carlo (MC)	12
1.4 Recherche de solutions rares	14
1.4.1 Splitting	14
1.4.2 Importance sampling (IS)	17
1.4.3 Discussion	17
1.5 Simulation multi-agents	19
1.5.1 Système multi-agents	19

1.5.2	SMA et simulation	20
1.5.3	SIMILAR	21
1.6	Conclusion	24
2	Partitionnement de données	27
2.1	Introduction	28
2.2	Généralités sur le partitionnement de données dans un espace métrique	28
2.2.1	Objectif	28
2.2.2	Mesures de distance	29
2.2.3	Extraction de caractéristiques	31
2.3	Partitionnement par centroïdes	32
2.3.1	K-means	33
2.3.2	K-médoïdes	34
2.4	Partitionnements hiérarchiques	34
2.4.1	Méthode agglomérative	35
2.4.2	Méthode divisive	35
2.5	Partitionnements par densités	36
2.5.1	Mean-shift	36
2.5.2	DBSCAN	37
2.6	Conclusion	37
II	Contributions	39
3	SPSC	41
3.1	Introduction	41
3.2	Généralités et concepts	43
3.2.1	Proposition d'une nouvelle politique d'exécution	43
3.2.2	Estimation de la probabilité de solutions	44
3.3	Implémentation de SPSC	47
3.3.1	Mise en oeuvre sur la plateforme Similar	47
3.3.2	Paramétrage de SPSC	47
3.3.3	Coût de calcul	49

3.4	Conclusion	50
4	Applications : Modèles multi-agents académiques	51
4.1	Introduction	52
4.2	Mesures de performance	52
4.2.1	Évaluation d'une simulation	52
4.2.2	Comparaison de deux politiques d'exécution	54
4.3	Proies prédateurs	55
4.3.1	Présentation du modèle	55
4.3.2	Solutions	57
4.3.3	Expériences	58
4.3.4	Robustesse de l'approche SPSC	60
4.3.5	Discussion	62
4.4	Virus	65
4.4.1	Présentation du modèle	65
4.4.2	Solutions	67
4.4.3	Expériences	68
4.4.4	Discussion	71
4.5	Conclusion	75
5	Application : Transport	77
5.1	Introduction	77
5.2	Présentation synthétique du modèle	78
5.2.1	Comportement des agents représentant des véhicules	78
5.2.2	Environnement	85
5.3	Expériences	85
5.3.1	Paramétrage et conditions initiales	86
5.3.2	Observables	87
5.3.3	Solutions envisagées	88
5.3.4	Résultats obtenus par MC (référence)	90
5.3.5	Configuration de la politique SPSC	90
5.3.6	Comparaison des résultats obtenus par SPSC et MC	91
5.3.7	Discussion	91

5.4	Conclusion	93
6	Extension probabiliste de SPSC	95
6.1	Introduction	95
6.2	Fuzzy c-means	96
6.3	Adaptation à la politique SPSC	97
6.3.1	Estimation de probabilité	97
6.3.2	Sélection des délégués	98
6.4	Expériences	99
6.5	Discussion	99
6.6	Conclusion	101
	Conclusions et perspectives	103
A	Résultats du modèle de proies prédateurs	107
A.1	Paramétrage de référence	107
A.2	Jeu de paramètres n° 1	113
A.3	Jeu de paramètres n° 2	116
A.4	Jeu de paramètres n° 3	119
B	Résultats du modèle de virus	123
B.1	Paramétrage de référence	123
B.2	Jeu de paramètres n° 1	126
B.3	Jeu de paramètres n° 2	129
B.4	Jeu de paramètres n° 3	132
C	Résultats du modèle de transport	135
D	Résultats de l'extension probabiliste	141
D.1	Taux de détection	141
D.2	Erreurs	142
	Bibliographie	145

Liste des tableaux

1.1	Détermination du nombre nécessaire de réplifications pour le modèle de proies prédateurs implémenté sur la plateforme SIMILAR. . . .	14
3.1	Implémentations des méthodes de clustering utilisées.	48
3.2	Temps de calcul des différentes étapes de SPSC pour un modèle multi-agents proies prédateurs.	50
4.1	Conditions initiales du modèle utilisé pour les expériences.	58
4.2	Paramétrage du modèle utilisé pour les expériences.	58
4.3	Liste des jeux de paramètres ainsi que les probabilités de référence des différentes solutions.	61
4.4	Conditions initiales utilisés dans le modèle virus.	67
4.5	Paramètres utilisés dans le modèle virus.	68
4.6	Liste des jeux de paramètres ainsi que les probabilités de référence des différentes solutions.	71
5.1	Paramètres utilisés par le modèle d'IDM.	84
5.2	Paramétrage du modèle d'IDM utilisé pour les expériences.	86
5.3	Configuration de l'auto-encodeur pour l'extraction de caractéristiques.	91
A.1	Résultats issus du jeu de paramètres de base des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.	108
A.2	Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.	110

A.3	Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.	112
A.4	Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs. . . .	113
A.5	Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.	114
A.6	Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs. . . .	115
A.7	Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs. . . .	116
A.8	Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.	117
A.9	Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs. . . .	118
A.10	Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs. . . .	119
A.11	Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.	120
A.12	Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs. . . .	121
B.1	Résultats issus du jeu de paramètres de base des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	123
B.2	Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	124
B.3	Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	125
B.4	Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	126
B.5	Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	127
B.6	Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	128

B.7	Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	129
B.8	Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	130
B.9	Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	131
B.10	Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	132
B.11	Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	133
B.12	Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus	134
C.1	Résultats des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ du modèle de transport	135
C.2	Résultats des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ du modèle de transport	136
C.3	Résultats des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ du modèle de transport	137
C.4	Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ du modèle de transport	138
C.5	Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ du modèle de transport	139
D.1	Résultats des taux de détection obtenus sur le modèle de proies prédateurs en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	141
D.2	Résultats des taux de détection obtenus sur le modèle de virus en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	141
D.3	Résultats des taux de détection obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	142
D.4	Résultats des erreurs obtenus sur le modèle de proies prédateurs en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	142
D.5	Résultats des erreurs sans échec obtenus sur le modèle de proies prédateurs en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	142

D.6	Résultats des erreurs obtenus sur le modèle de virus en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	143
D.7	Résultats des erreurs sans échec obtenus sur le modèle de virus en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	143
D.8	Résultats des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	143
D.9	Résultats des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	144
D.10	Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	144
D.11	Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)	144

Table des figures

1.1	Illustration d'une simulation stochastique en temps discret.	9
1.2	Exemple d'application de la technique de <i>splitting</i>	16
1.3	Exemple d'application de la technique de l'échantillonnage préférentiel.	18
1.4	Schéma illustrant le fonctionnement d'un simulateur multi-agents.	21
2.1	Illustration d'un exemple de partitionnement en 5 clusters d'un nuage de 50 points en 2 dimensions.	29
2.2	Carte mentale des algorithmes classiques de partitionnement de données.	30
2.3	Illustration simple de l'architecture d'un auto-encodeur.	32
2.4	Exemple d'une représentation de partitionnement en dendrogramme.	35
3.1	Diagramme de la politique d'exécution proposée.	44
3.2	Détail du processus pour le premier et le deuxième découpage $[t_{(0)}, t_{(2)}]$	46
3.3	Architecture de l'application développée.	47
3.4	Comparaison des coûts de calcul et des étapes de clonage et de partitionnement de SPSC.	50
4.1	Dynamique de population au cours du temps pour les différentes solutions.	57
4.2	Résultats issus de 500 réplifications avec la méthode MC. Chaque point représente l'état d'une réplification au pas de temps 1000. . .	59

4.3	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres de base.	61
4.4	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres n° 1.	62
4.5	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres n° 2.	63
4.6	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres n° 3.	64
4.7	Présentation schématique du modèle SIR.	66
4.8	Résultats issus de 500 réplifications avec la méthode MC. Chaque point représente l'état d'une réplification au pas de temps 250. . . .	68
4.9	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres de base.	70
4.10	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres n° 1.	72
4.11	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres n° 2.	73
4.12	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres n° 3.	74
5.1	Représentation du réseau routier utilisé pour les expériences. . . .	86
5.2	Génération des véhicules dans le réseau routier avec le plan emprunté des agents.	88
5.3	Échantillonnage expérimental du débit (en nombre de véhicules par seconde) par rapport à la densité (en nombre de véhicules par mètre) afin de déterminer la densité critique d_c	89
5.4	Les différents gains relatifs obtenus sur le modèle de transport. . .	92
6.1	Illustration de l'extension probabiliste de SPSC pour le premier et le deuxième découpage.	98
6.2	Les différents gains relatifs obtenus avec K-means et Fuzzy c-means sur le modèle de proies prédateurs.	99
6.3	Les différents gains relatifs obtenus avec K-means et Fuzzy c-means sur le modèle de virus.	100

6.4	Les différents gains relatifs obtenus avec K-means et Fuzzy c-means sur le modèle de transport.	100
6.5	Exemple d'application de Fuzzy c-means et de K-means sur un ensemble de 50 répliques du modèle de proies prédateurs.	102

Introduction

Lorsque l'on souhaite étudier un système, l'une des méthodes les plus simples consiste à réaliser des expérimentations sur ce dernier. Cependant, les coûts d'une expérience réelle peuvent être colossaux pour des raisons matérielles (*e.g.* stabilité d'une éolienne flottante) ou des conséquences sérieuses (*e.g.* essai nucléaire). S'il peut être parfois possible de travailler sur un modèle réduit du système (*e.g.* bassin pour étudier la houle [7] ou fourmilière artificielle pour étudier le comportement des fourmis [63]), la solution la moins coûteuse reste la simulation numérique [88], un outil permettant d'étudier des systèmes naturels ou artificiels, sans effectuer d'expérience dans la vie réelle.

La simulation numérique repose sur une représentation abstraite du système à étudier que l'on appelle modèle. Celui-ci est représenté par son comportement et son état, qui décrit tous les aspects quantitatifs et qualitatifs de ce système à un instant t . Le moteur de simulation a pour rôle de faire évoluer un état quelconque sur une durée Δt afin d'obtenir l'état à l'instant $t + \Delta t$. Le terme simulation désigne de façon générique l'exploitation d'un modèle numérique. Par exemple, l'objectif d'une simulation peut être de prédire l'état futur d'un système, d'expliquer son fonctionnement ou encore de former des utilisateurs à son utilisation.

Deux types de modélisations peuvent être distingués : une modélisation déterministe et une modélisation stochastique. La première est souvent utilisée lorsque nous possédons des lois physiques décrivant les phénomènes que nous souhaitons étudier (*e.g.* la déformation d'un objet élastique), tandis que la seconde est plus particulièrement appliquée en sciences de la vie ou sociales, où les phénomènes sont souvent exprimés par des probabilités pour représenter l'incertain.

La variabilité inhérente à un modèle stochastique impose d'obtenir plusieurs réalisations afin que les résultats soient statistiquement représentatifs. Les résultats

d'une simulation stochastique sont donc calculés à partir d'un ensemble de réalisations aussi appelées répliques. Si l'on s'intéresse à des événements fréquents, la méthode Monte Carlo (MC) [52] est généralement appliquée. Elle consiste à exécuter un nombre suffisant de répliques pour obtenir de bonnes estimations des résultats possibles. Si en revanche on s'intéresse à des événements plus rares [71], la méthode MC nécessite un très grand nombre de répliques et n'est donc pas adaptée. Dans ce cas, le défi est de réduire le coût de calcul en maintenant le plus possible la qualité des estimations.

Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques dont l'objectif est d'explorer de manière efficace les différents événements possibles, notamment rares, afin de mieux les caractériser. Plus précisément, nous cherchons, pour un coût de calcul fixe, à déterminer si un événement particulier est possible ainsi que sa probabilité d'apparition. Nous nous intéressons particulièrement au domaine de systèmes multi-agents car les applications présentent souvent un cadre parfait pour cette étude (stochasticité, temps de calcul coûteux).

Les idées principales qui sous-tendent l'approche proposée sont : **1)** chaque réplique d'une simulation stochastique peut être échantillonnée dans le temps et ainsi *découpée* en plusieurs morceaux, **2)** cette dernière peut être, à chaque pas de temps, clonée, **3)** parmi les différentes répliques, il est possible, à intervalle régulier, de regrouper les plus similaires et de sélectionner les plus intéressantes pour explorer au mieux l'ensemble des solutions possibles.

Cette thèse est composée de deux parties : la première comporte un état de l'art sur la modélisation stochastique qui présente notamment différentes politiques existantes ainsi que la notion de simulation multi-agents (chapitre 1). Cette partie est ensuite complétée par des méthodes de partitionnement de données permettant de traiter les données produites par les répliques (chapitre 2). Dans la seconde partie, nous présentons la nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques que nous proposons (chapitre 3). Cette politique est ensuite évaluée sur des modèles multi-agents académiques (chapitre 4) et un modèle multi-agents, plus complexe, dans le domaine du transport routier (chapitre 5). Puis, une extension probabiliste de la politique d'exécution est proposée (chapitre 6). Enfin, nous terminons en résumant les travaux réalisés et en identifiant des perspectives

possibles.

Première partie

État de l'art

Chapitre 1

Modélisation et simulation stochastique

Sommaire du présent chapitre

1.1 Introduction	8
1.2 Généralités	8
1.2.1 Estimation de la probabilité d'une solution	9
1.2.2 Cas d'utilisation de simulations stochastiques	10
1.2.3 Génération de nombres pseudo-aléatoires	11
1.3 Méthode de Monte-Carlo (MC)	12
1.4 Recherche de solutions rares	14
1.4.1 Splitting	14
1.4.2 Importance sampling (IS)	17
1.4.3 Discussion	17
1.5 Simulation multi-agents	19
1.5.1 Système multi-agents	19
1.5.2 SMA et simulation	20
1.5.3 SIMILAR	21
1.6 Conclusion	24

1.1 Introduction

La simulation stochastique est une branche importante de la simulation numérique [4]. Elle vise à comprendre, expliquer et prédire le comportement de systèmes réels complexes à l'aide d'une modélisation sous forme d'enchaînement de tirages de nombres aléatoires. Les résultats étant par nature variables, l'objectif est bien souvent de déterminer les probabilités d'obtention des différentes solutions possibles.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons plus spécifiquement à des simulations multi-agents stochastiques. Elles représentent en effet un cas d'étude parfaitement adapté à notre problématique étant généralement :

- gourmandes en ressources computationnelles et nécessitant donc un temps d'exécution important compliquant l'estimation de grandeurs statistiques,
- impossibles à résoudre analytiquement.

Nous allons, dans la section 1.2, rappeler les fondements de la simulation stochastique. Nous aborderons ensuite la méthode classique Monte-Carlo et ses points faibles dans la section 1.3. Des méthodes spécifiques dédiées à la recherche d'évènements rares seront alors exposées dans la section 1.4. Enfin, nous introduirons dans la section 1.5 la notion de simulation multi-agents ainsi que SIMILAR, le méta-modèle qui sera utilisé pour concevoir et implémenter les modèles utilisés dans la suite de cette thèse.

1.2 Généralités

L'objectif d'une simulation stochastique est d'étudier un système sujet à des phénomènes aléatoires que nous ne pouvons pas représenter sous forme de lois physiques. Le coeur d'une telle simulation est un modèle stochastique du système étudié. Ce modèle est paramétré et permet de faire évoluer un état initial du système sur une durée donnée.

L'utilisateur n'est généralement pas intéressé par l'état même du système, qui contient des informations très détaillées (souvent au niveau microscopique), mais plutôt par des résumés (souvent au niveau macroscopique), appelés observables, de ces informations. Ces aspects sont illustrés par la figure 1.1 et l'exemple 1.1.

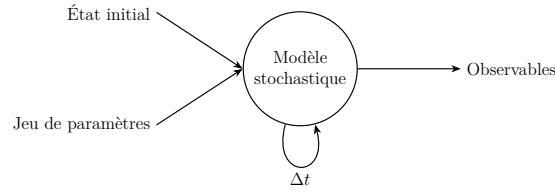


FIGURE 1.1 – Illustration d’une simulation stochastique en temps discret.

Exemple 1.1 (Système proies prédateurs) Considérons les interactions entre des populations de proies se nourrissant de la végétation présente dans l’environnement et de prédateurs chassant ces dernières. Une simulation stochastique d’un tel système peut être caractérisée ainsi :

Modèle : Modèle multi-agents décrivant les comportements stochastiques des proies et des prédateurs, vus comme des agents, ainsi que la topologie et la dynamique de l’environnement.

Paramètres : Ensemble des paramètres relatifs aux comportements des agents (déplacement, reproduction, décès, prédation) et à la croissance de la végétation.

État du système à l’instant t : Caractéristiques (position, type, comportement, âge, énergie, etc.) des agents et de l’environnement (distribution spatiale de la végétation).

État initial : État du système à $t = 0$. Les positions des agents sont initialisés aléatoirement. Les autres caractéristiques sont fixées par l’utilisateur.

Observables : Le nombre de proies et de prédateurs présents dans le système.

1.2.1 Estimation de la probabilité d’une solution

Pour un modèle stochastique donné, nous pouvons représenter les observables à l’instant t par un vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$. On note $\mathcal{D}$ le domaine du vecteur $\mathbf{X}_t$. Nous nous intéressons plus spécifiquement à des ensembles de valeurs particulières que le vecteur $\mathbf{X}_t$ peut prendre. Chacun de ces ensembles constitue une **solution** $\mathcal{S}$ qui est simplement un sous-ensemble du domaine $\mathcal{D}$, *i.e.*, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$.

Exemple 1.2 Considérons à nouveau l'exemple 1.1 (système proies prédateurs). Dans ce cas, $\mathbf{X}_t = (X_{t,1}, X_{t,2})$ représente les nombres de proies ($X_{t,1}$) et de prédateurs ($X_{t,2}$), et $\mathcal{D} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Les solutions intéressantes seront :

- $\mathcal{S}_1 = \{(0, 0)\}$: extinction des proies et des prédateurs ;
- $\mathcal{S}_2 = \{\mathbb{N}_{>0} \times \{0\}\}$: extinction des prédateurs ;
- $\mathcal{S}_3 = \{\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}\}$: les 2 espèces cohabitent, l'évolution des populations étant quasi périodique.

L'objectif d'une simulation stochastique est de déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t \in \mathcal{S}) = \theta_{\mathcal{S}}$ de la solution $\mathcal{S}$ au temps t (en général le pas de temps final de la simulation). Or, sachant qu'il est difficile voire impossible d'obtenir la distribution du vecteur $\mathbf{X}_t$ sous une forme analytique, l'étude de la probabilité $\theta_{\mathcal{S}}$ consiste à construire un estimateur $\hat{\theta}_{\mathcal{S}}$ permettant d'estimer $\theta_{\mathcal{S}}$ en se basant sur un ensemble de répliques exécutées. Nous donnerons dans la section 1.3 un exemple d'estimateur fréquemment utilisé.

1.2.2 Cas d'utilisation de simulations stochastiques

Nous présentons dans cette section quelques cas d'utilisation classiques de simulations stochastiques.

Prédiction La prédiction d'un état final à partir d'un état initial constitue l'une des utilisations les plus courantes et les plus évidentes de la simulation numérique. Un modèle bien calibré (voir ci-après) est indispensable pour obtenir des prédictions correctes.

Calibration d'un modèle Si nous disposons de données issues d'expériences réelles, nous pouvons fixer les mêmes conditions initiales que dans celles-ci afin de déterminer un jeu de paramètres pour lequel les simulations produisent les mêmes résultats (*e.g.*, probabilité qu'une solution $\mathcal{S}$ soit atteinte) que les expériences réelles. Cette démarche est appelée *calibration d'un modèle*.

Analyse de sensibilité L'objectif de l'analyse de sensibilité est de déterminer l'impact de la variation des variables d'entrée du modèle (paramètres du modèle et conditions initiales) sur les résultats de simulation. Elle permet ainsi d'identifier les variables d'entrée les plus influentes, et réciproquement les moins influentes, afin de mieux comprendre le système modélisé et de simplifier le modèle par le principe de parcimonie. Il existe différentes méthodes pour établir un plan d'expérience afin de réaliser une analyse de sensibilité (méthodes locales, FAST [47], etc.).

Résolution de problèmes inverses L'objectif des problèmes inverses est de déterminer les principales causes d'un phénomène observé [84]. La résolution de problèmes inverses consiste à approximer au mieux l'état initial et éventuellement les paramètres du modèle qui permettent de reproduire le phénomène d'intérêt (l'état final connu).

Synthèse Nous remarquons que la capacité à estimer précisément et efficacement la probabilité d'une solution $\mathcal{S}$ est essentielle pour ces différents cas d'utilisation et de validation. Améliorer cette capacité sans ressource supplémentaire permet d'accélérer l'exécution d'une simulation.

1.2.3 Génération de nombres pseudo-aléatoires

Les simulations stochastiques reposent sur des générateurs de nombres pseudo-aléatoires (PRNG) pour représenter les différents processus aléatoires. Un tel générateur doit posséder les caractéristiques suivantes :

- à la différence d'un générateur cryptographique, il doit être prévisible, *i.e.*, produire la même suite de nombres pseudo-aléatoires à partir d'une *graine* (état initial du générateur) donnée afin de pouvoir reproduire des simulations à l'identique,
- il doit être de plus de bonne qualité, c'est-à-dire avoir une période suffisamment longue avec une distribution de nombres générés la plus homogène possible. La qualité d'un PRNG peut être évaluée à l'aide de tests dédiés comme PractRand [18] ou TestU01 [42].

Des PRNGs classiquement utilisés en simulation incluent Mersenne Twister [51], XorShift* [48] ou des variantes de ce dernier comme xoshiro* ou xoroshiro* [81], [82].

Dans le cadre des expérimentations réalisés durant cette thèse, les PRNGs xoroshiro128** (pour les modèles jouets) et xoshiro256** (pour le modèle de transport) ont été utilisés.

1.3 Méthode de Monte-Carlo (MC)

La méthode Monte-Carlo (MC) [52] consiste à répliquer une simulation un grand nombre (N) de fois de façon indépendante. Les résultats de ces N répliques exécutées peuvent donner une vision globale sur la distribution du vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$ ainsi que des estimations de la probabilité d'apparition des différentes solutions. Nous présentons par la suite un estimateur classique puis une approche permettant de déterminer le nombre N satisfaisant une qualité d'estimation souhaitée.

Estimation de la probabilité d'une solution L'estimateur basé sur le principe du maximum de vraisemblance est le plus utilisé afin d'évaluer les réalisations d'expériences. Pour N répliques exécutées (*i.e.* N échantillons $\mathbf{X}_t^1, \dots, \mathbf{X}_t^N$ du vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$), il est possible de construire un estimateur $\hat{\theta}_{\mathcal{S}}$ de la probabilité $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t \in \mathcal{S}) = \theta_{\mathcal{S}}$ par :

$$\hat{\theta}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}_t^i) \quad (1.1)$$

où $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}$ est la fonction caractéristique de la solution $\mathcal{S}$.

Calcul du nombre de répliques à simuler Soit $X_{t,i}$ un composant du vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$, S_i une solution liée à $X_{t,i}$ et $\hat{\theta}_{S_i}$ l'estimateur de la probabilité $\mathbb{P}(X_{t,i} \in S_i) = \theta_{S_i}$ défini par

$$\hat{\theta}_{S_i} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbb{1}_{S_i}(X_{t,i}^j) \quad (1.2)$$

avec $X_{t,i}^j$ le i -ème composant de l'échantillon $\mathbf{X}_t^j$ du vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$.

Généralement nous savons, par la loi des grands nombres, que plus le nombre N_i est grand, meilleure sera la qualité de l'estimation. Néanmoins, exécuter une infinité de répliques n'est pas réaliste. Aussi, il s'agit de déterminer la valeur minimale de N_i pour que les résultats soient statistiquement significatifs, c'est-à-dire, étant donné une erreur relative voulue ϵ et un niveau de confiance $1 - \alpha$, nous souhaitons satisfaire l'inéquation suivante :

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{\theta}_{S_i} - \theta_{S_i}|}{\theta_{S_i}} \leq \epsilon\right) \geq 1 - \alpha. \quad (1.3)$$

Pour ce faire, l'algorithme suivant est généralement appliqué [4, p. 449] :

1. Exécuter n_0 répliques (n_0 observations $X_{t,i}^1, \dots, X_{t,i}^{n_0}$).

2. Calculer

$$N_i = \lceil \left(\frac{Z_{1-(\frac{\alpha}{2})} \cdot s_i}{\epsilon \cdot \bar{X}_{t,i}} \right)^2 \rceil \quad (1.4)$$

où $Z_{1-(\alpha/2)}$ est le $100(1-\alpha/2)$ ^{ième} quantile de la distribution normale centrée réduite, s_i l'écart type de ces n_0 échantillons et $\bar{X}_{t,i}$ la valeur moyenne de ces n_0 échantillons. Les valeurs généralement utilisées pour n_0 , ϵ et α sont respectivement 150, 0.05 et 0.05.

Nous pouvons ensuite déduire le nombre N satisfaisant l'équation (1.3) pour chaque composant de $\mathbf{X}_t$:

$$N = \max_i N_i \quad (1.5)$$

Notons qu'il s'agit là d'une méthode heuristique basée sur une hypothèse forte : la normalité des observables. Dans le cas général, cette hypothèse n'est que rarement vérifiée. Un exemple d'utilisation de cette méthode sur un modèle de proies prédateurs (voir l'exemple 1.1) est présenté dans le tableau 1.1. Nous obtenons le nombre nécessaire $N = 3600$ avec les valeurs classiquement utilisées pour n_0 , ϵ et α ($n_0 = 150$, $\epsilon = 0.05$ et $\alpha = 0.05$). Cependant, si nous souhaitons obtenir un estimateur plus précis (*e.g.* avec $\alpha = 0.005$), nous obtenons un $N = 7249285$

TABLEAU 1.1 – Détermination du nombre nécessaire de répliques pour le modèle de proies prédateurs implémenté sur la plateforme SIMILAR. Nous avons $\mathbf{X}_t = (X_{t,1}, X_{t,2})$ avec $X_{t,1}$ le nombre de proies et $X_{t,2}$ le nombre de prédateurs. Les paramètres utilisés sont $n_0 = 150$, $\epsilon = 0.05$ et $\alpha = 0.05$.

i	s_i	$\bar{X}_{t,i}$	N_i
1	697.83	783.77	1219
2	196.95	128.67	3600

1.4 Recherche de solutions rares

Une solution peut être rare mais avoir des conséquences dramatiques si elle survient : pandémie [19], accident industriel, crise financière [13], blocage du canal de Suez, disparition d’une espèce dans un écosystème [43]... Il peut donc être intéressant d’estimer sa probabilité d’apparition [12].

La méthode MC décrite dans la section précédente est-elle applicable pour estimer les probabilités d’apparition de solutions rares ? En théorie oui, mais cela suppose une puissance de calcul considérable [40]. Des méthodes plus intelligentes ont donc été développées. Deux d’entre elles (Splitting et Importance Sampling) sont présentées dans les sections suivantes.

1.4.1 Splitting

La technique dite de *splitting* est utilisée pour calculer la probabilité qu’un événement rare survienne dans une simulation d’un modèle de Markov [35], [83]. Nous présentons succinctement dans la suite le principe ainsi qu’une implémentation de cette technique.

1.4.1.1 Principe de la méthode

Le principe de la technique de *splitting* est le suivant. Tout d’abord, nous préparons une fonction indicatrice h qui prend en argument le vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$ à un instant t puis retourne un niveau de rareté. Cette fonction h doit également vérifier la propriété que la borne supérieure $\sup_{\mathbf{X}_t \in \mathcal{D}} h(\mathbf{X}_t)$ de l’image de h est

atteint uniquement par la solution rare cible $\mathcal{S}$:

$$h^{-1}(\sup_{\mathbf{X}_t \in \mathcal{D}} h(\mathbf{X}_t)) = \mathcal{S} \quad (1.6)$$

Pour une réplcation donnée, la fonction h est donc une fonction qui dépend simplement du pas de temps t . Ensuite, nous considérons n valeurs strictement croissantes, représentant autant de niveaux de rareté :

$$h_1 < h_2 < \dots < h_n = \sup_{\mathbf{X}_t \in \mathcal{D}} h(\mathbf{X}_t)$$

La technique de *splitting* consiste à estimer progressivement la probabilité d'atteindre ces différents niveaux de rareté $(h_1, h_2, \dots, h_n)$. Nous commençons par estimer la probabilité qu'une réplcation puisse atteindre h_1 avant le temps final t_f :

$$\mathbb{P}(\exists t \in [0, t_f], h(t) > h_1) = \theta_{(1)}, \quad (1.7)$$

puis estimer récursivement la probabilité d'atteindre le prochain niveau sachant que le niveau actuel est déjà atteint :

$$\mathbb{P}(\exists t^* \in [t, t_f], h(t^*) > h_{i+1} \mid \exists t \in [0, t_f], h(t) > h_i) = \theta_{(i+1|i)} \quad (1.8)$$

La probabilité de la solution rare $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t \in \mathcal{S}) = \theta_{\mathcal{S}}$ peut donc finalement être estimée par le produit de toutes les probabilités conditionnelles :

$$\theta_{\mathcal{S}} = \theta_{(1)} \prod_{i=1}^{n-1} \theta_{(i+1|i)} \quad (1.9)$$

1.4.1.2 Implémentation

Nous allons maintenant construire des estimateurs de $\theta_{(1)}$ et $\theta_{(i+1|i)}$. Nous commençons comme la méthode MC en lançant n réplcations. Disons que n_1 réplcations parmi n exécutées ont atteint le niveau h_1 , nous pouvons donc estimer $\theta_{(1)}$

par :

$$\hat{\theta}_{(1)} = \frac{n_1}{n}. \quad (1.10)$$

Ensuite, nous allons cloner (étape de *splitting*) ces n_1 réplifications au moment où le niveau h_1 est atteint¹ puis exécuter ces clones jusqu'au temps final t_f (illustré par la figure 1.2). Si nous notons n_1^c le nombre total de clones, et n_2 réplifications parmi ces n_1^c clones ont atteint le niveau h_2 , nous pouvons en déduire l'estimateur pour la probabilité conditionnelle :

$$\hat{\theta}_{(2|1)} = \frac{n_2}{n_1^c}. \quad (1.11)$$

En répétant ce processus de *splitting*, nous obtenons donc un estimateur final :

$$\hat{\theta}_S = \hat{\theta}_{(1)} \prod_{i=1}^{n-1} \hat{\theta}_{(i+1|i)} \quad (1.12)$$

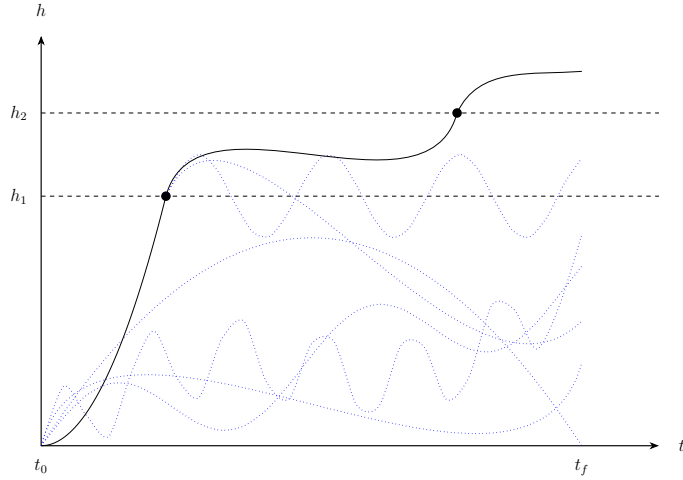


FIGURE 1.2 – Exemple d'application de la technique de *splitting*. Les réplifications sont représentées par des trajectoires entre t_0 et t_f . Elles sont colorées en noir si le niveau de rareté souhaitée est atteint et en bleu pointillé sinon.

1. Ces n_1 réplifications sont bien clonées chacune à un pas de temps différent.

1.4.2 Importance sampling (IS)

L'échantillonnage préférentiel (Importance Sampling – IS) est un outil très puissant et élégant basé sur le changement de variable pour estimer l'espérance d'une fonction $g : \mathbb{E}_f(g(Y))$ où Y est une variable aléatoire suivant une fonction de densité f [41]. Dans le cas où Y prend rarement des valeurs dans le support de g , l'estimation de l'espérance nécessite un grand nombre d'expériences. La méthode IS consiste à construire une nouvelle fonction de densité $\tilde{f}$ telle que la variable aléatoire correspondante $\tilde{Y}$ prenne plus souvent des valeurs dans le support de la fonction g . L'espérance de g peut alors être réécrite par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_f(g(Y)) &= \int g(y)f(y)dy = \int g(y)\frac{f(y)}{\tilde{f}(y)}\tilde{f}(y)dy \\ &= \int g(y)L(y)\tilde{f}(y)dy = \mathbb{E}_{\tilde{f}}(g(\tilde{Y})L(\tilde{Y})) \end{aligned} \quad (1.13)$$

avec $L = f/\tilde{f}$ le ratio de vraisemblance de la densité f par rapport à la densité $\tilde{f}$. Comme la fonction de densité $\tilde{f}$ donne souvent des valeurs dans le support de la fonction g , nous pouvons obtenir l'estimation de $\mathbb{E}(g(Y))$ en calculant l'espérance du produit gL suivant la densité $\tilde{f}$ avec peu de réalisations. Un exemple d'application est illustré dans la figure 1.3.

Si nous considérons g la fonction indicatrice de l'appartenance de la solution $\mathcal{S}$ du vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$, l'espérance d'intérêt représente alors la probabilité $\mathbb{P}(\mathbf{X}_t \in \mathcal{S}) = \theta_{\mathcal{S}}$. L'estimateur $\hat{\theta}_{\mathcal{S}}$ peut être construit à l'aide de IS pour réduire l'ensemble de répliques à exécuter.

1.4.3 Discussion

Limites des approches existantes Malgré les avantages des méthodes de splitting et IS, elles sont difficiles à appliquer lorsqu'il s'agit d'un modèle de système complexe. La technique de splitting nécessite une connaissance sur la succession d'événements menant à la solution rare recherchée $\mathcal{S}$. L'inconvénient est que ces phénomènes successifs sont généralement inconnus et sont souvent l'objectif des études. La méthode IS nécessite non seulement la manipulation des aspects fondamentaux du modèle comme la distribution d'une variable aléatoire, mais aussi la

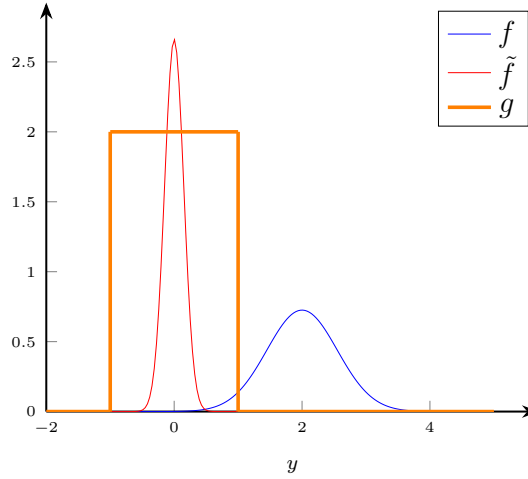


FIGURE 1.3 – Exemple d’application de la technique de l’échantillonnage préférentiel. L’espérance de la fonction g est difficilement estimée en faisant des réalisations d’une variable aléatoire suivant la fonction de densité f . L’introduction d’une nouvelle fonction de densité $\tilde{f}$ permet de réduire le nombre de réalisations nécessaires.

maîtrise parfaite de la solution recherchée $\mathcal{S}$ dont le support de g est généralement inconnu. De plus, ces méthodes ciblent une seule solution donnée là où l’utilisateur est généralement intéressé par un ensemble de solutions.

Estimation versus détection Nous allons montrer ici que bien détecter une solution possible $\mathcal{S}$ (*i.e.*, déterminer une valeur de $\hat{\theta}_{\mathcal{S}} > 0$) ne signifie pas nécessairement bien estimer sa probabilité d’apparition. Au contraire, un bon taux de détection peut être associé à des estimations de mauvaise qualité. Ce problème est ici illustré à l’aide d’un exemple simple.

Considérons ainsi une simulation possédant une solution $\mathcal{S}$ rare mais possible, *i.e.*, dont la probabilité d’apparition $P_{ref}(\mathcal{S})$ est faible mais supérieure à 0, par exemple : $P_{ref}(\mathcal{S}) = 0.01$. Puis une métrique évaluant la précision d’estimation : $Err(\mathcal{S}) = |\hat{P}(\mathcal{S}) - P_{ref}(\mathcal{S})|$, avec $\hat{P}(\mathcal{S})$ la probabilité estimée de $\mathcal{S}$ par une politique d’exécution de la simulation.

On exécute 5 lots de réplifications à l’aide de deux politiques différentes. La première politique ne détecte jamais la solution $\mathcal{S}$ (*i.e.* aucune des réplifications de ces 5 lots ne l’atteint). Ainsi, les probabilités estimées par cette politique sont toujours 0 et l’erreur absolue d’estimation moyenne vaut 0.01. La seconde politique détecte

systématiquement $\mathcal{S}$ (*i.e.* au moins une réplication l'atteint pour chacun des lots) mais surestime sa probabilité d'apparition. Par exemple : 0.02, 0.01, 0.02, 0.02, 0.04 qui donne en moyenne une erreur absolue de 0.012.

Quel estimateur préférer ? Le premier est plus précis du point de vue de la métrique considérée (l'erreur moyenne) mais considère $\mathcal{S}$ comme impossible alors que le second considère systématiquement $\mathcal{S}$ comme possible et lui assigne une probabilité proche de $P_{ref}(\mathcal{S})$ bien que surestimée. La réponse à cette question dépend bien sûr des objectifs de l'utilisateur mais de façon générale, il n'est pas possible de dire que le premier estimateur est meilleur que le second.

1.5 Simulation multi-agents

Le domaine de la simulation multi-agents est apparu à la fin du XX^e siècle [21], [62]. Il se positionne à l'intersection de multiples disciplines dont les deux plus importantes sont l'Intelligence Artificielle Distribuée et la simulation numérique [3], [6]. La première porte sur la résolution distribuée de problèmes, alors que la seconde cherche à comprendre et reproduire le fonctionnement d'un système réel.

La simulation multi-agents est généralement utilisée pour étudier des systèmes complexes où de multiples entités interagissent engendrant des phénomènes émergents. Cette approche a été appliquée à de nombreux domaines comme l'astrophysique [79], la finance [8], [17], la logistique portuaire [75] ou l'épidémiologie [66].

Dans un premier temps, nous présenterons brièvement le concept fondamental lié à la simulation multi-agents et issu de l'Intelligence Artificielle Distribuée : les Systèmes multi-agents (SMA) puis nous aborderons le lien entre SMA et simulation. Enfin, nous formaliserons plus précisément la notion de simulation multi-agents à travers l'étude du méta-modèle utilisé dans le cadre de cette thèse : SIMILAR, basé sur le principe influences/réaction.

1.5.1 Système multi-agents

Le concept de Système Multi-Agents (SMA) a été défini de multiples façons dans la littérature [23], [89]. Il est donc difficile d'en donner une définition univoque, valable dans tous les contextes. Nous nous concentrons ici sur une présentation

générique.

Formellement, un SMA peut être caractérisé de façon minimale par :

- un environnement, discret ou continu, souvent défini comme un espace métrique ou topologique dans lequel les agents interagissent ; fréquemment négligée, cette notion est pourtant fondamentale [24], [50], [85],
- un ensemble dynamique d'agents situés dans l'environnement et capables de modifier celui-ci via leurs interactions.

Un agent peut lui-même être défini de façon minimale, comme une entité informatique autonome capable de percevoir localement son environnement et éventuellement d'établir une représentation symbolique de celui-ci et d'agir, c'est-à-dire de modifier l'état de l'environnement [23].

Cette définition se voulant minimale, elle peut sembler lacunaire et demanderait à être précisée (On pourrait ainsi évoquer les différentes architectures d'agents, le rôle et les modèles de communication entre agents, etc.). Elle demeure néanmoins suffisante en première analyse et sera formalisée dans le cadre du méta-modèle SIMILAR dans la section 1.5.3.

1.5.2 SMA et simulation

Une simulation multi-agents peut donc être définie comme un SMA visant à modéliser un système réel et exécuté par un *moteur de simulation*. Ce dernier constitue la brique logicielle prenant en charge l'ordonnancement de la simulation (activation des fonctions de perception, mémorisation et décision des agents, dynamique de l'environnement) et des probes, *i.e.*, des outils permettant d'observer et de contrôler celle-ci [50]. Dans la suite, nous appellerons *modèle de simulation*, un modèle initialisé, *i.e.*, décrivant comment générer l'état initial de la simulation (figure 1.4).

Le fonctionnement d'un moteur de simulation est intimement lié au méta-modèle utilisé pour modéliser le système étudié. On peut ainsi citer les approches "classique" (qui assimilent action et modification de l'environnement) [57], "orientées interaction", qui, comme leur nom l'indique, se concentrent sur les interactions entre agents [39], [67], basées sur les événements discrets (et plus spécifiquement

DEVS) [9], [10], [60], ou encore fondées sur le principe influences/réaction [53], [54], [59].

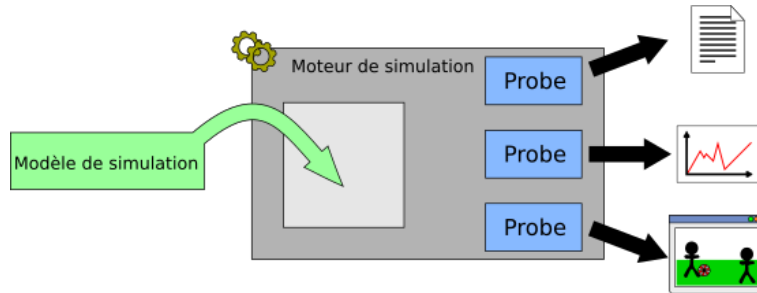


FIGURE 1.4 – Schéma illustrant le fonctionnement d'un simulateur multi-agents.

Une simulation multi-agents est souvent exécutée dans le cadre d'une *plateforme de simulation multi-agents*, c'est-à-dire un logiciel permettant de faciliter la conception et l'exécution des simulations via l'utilisation d'un méta-modèle et d'une méthodologie spécifiques.

De nombreuses plateformes de simulation multi-agents comme GAMA [29], NetLogo [87], Turtlekit [55], MASON [44] ou eMuLSion [65] sont aujourd'hui disponibles pour un usage générique ou lié à une application particulière. Dans le cadre de cette thèse nous utiliserons la plateforme SIMILAR2LOGO² basée sur le méta-modèle SIMILAR [58], [59] et qui a été développée au sein de notre laboratoire.

1.5.3 Similar

SIMILAR est un méta-modèle visant à formaliser la conception de simulations multi-agents basées sur le principe influence/réaction introduit par [25] dans le cadre des SMA et adapté à la simulation par [56]. Comparativement aux approches existantes basées sur influence/réaction, SIMILAR permet de définir des simulations multi-niveaux [59] et intègre un moteur de simulation efficace, pouvant être facilement parallélisé sur une architecture multi-coeurs ou une grille de calcul [58].

2. <https://github.com/gildasmorvan/similar2logo>

Le principe influence/réaction définit l'action d'un agent non comme une modification directe de l'environnement mais comme l'émission d'*influences* qui seront intégrées par une fonction de *réaction* qui calculera l'état du système au pas de temps suivant.

Dans SIMILAR, les agents peuvent percevoir l'état d'autres niveaux et/ou y émettre des influences.

Le méta-modèle est décrit formellement dans la suite de cette section.

Spécification des niveaux et de leurs interactions Un modèle multi-niveaux est défini par un ensemble de "niveaux" L et une spécification de leurs interactions. Deux types d'interaction sont définis dans SIMILAR : une relation d'influence (les agents situés dans un niveau l peuvent produire des influences dans un niveau $l' \neq l$) et une relation de perception (les agents situés dans un niveau l peuvent percevoir l'état d'un niveau $l' \neq l$). Ces relations sont spécifiées par des graphes dirigés dénotés respectivement $\langle L, E_I \rangle$ et $\langle L, E_P \rangle$, où E_I et E_P sont deux ensembles d'arêtes, *i.e.*, des paires ordonnées d'éléments de L .

Les voisinages entrants et sortants dans $\langle L, E_I \rangle$ (respectivement $\langle L, E_P \rangle$) sont dénotés N_I^- et N_I^+ (resp. N_P^- et N_P^+) et sont définis comme suit :

$$\forall l \in L, N_I^-(l) \text{ (resp. } N_P^-(l)) = \{l\} \cup \{l' \in L : l'l \in E_I \text{ (resp. } E_P)\}, \quad (1.14)$$

$$\forall l \in L, N_I^+(l) \text{ (resp. } N_P^+(l)) = \{l\} \cup \{l' \in L : ll' \in E_I \text{ (resp. } E_P)\}, \quad (1.15)$$

Population d'agents et environnements L'ensemble des agents existants dans le système au temps t est dénoté par $A(t)$. Pour tout niveau l dans L , l'ensemble des agents appartenant au niveau l et au temps t est dénoté par $A_l(t) \subseteq A(t)$. Un agent appartient à un niveau si et seulement si un sous-ensemble de ses états physiques ϕ_a appartient à l'état du niveau :

$$\forall a \in A(t), \forall l \in L, a \in A_l(t) \text{ ssi } \exists \phi_a^l(t) \subseteq \phi_a(t) | \phi_a^l(t) \subseteq \sigma^l(t). \quad (1.16)$$

Ainsi, un agent peut appartenir à zéro, un ou plusieurs niveaux, idem pour un environnement.

L'état d'un agent à l'instant t , $S_a(t)$ est défini comme l'union de son état global

(indépendant du ou des niveaux où il est situé) et pour chaque niveau auquel il appartient son état local public (*i.e.*, perceptibles par les autres agents) et privés (*i.e.*, non perceptibles par les autres agents).

Production d'influences L'état dynamique d'un niveau $l \in L$ au temps t , dénoté par $\delta^l(t) \in \Delta^l$, est un tuple $\langle \sigma^l(t), \gamma^l(t) \rangle$, où $\sigma^l(t) \in \Sigma^l$ et $\gamma^l(t) \in \Gamma^l$ sont l'ensemble de propriétés environnementales et influences de l . $\sigma^l(t)$ contient ainsi au minimum l'ensemble des états locaux publics des agents présents dans l .

Le modèle comportemental des agents permet de prendre en compte les relations d'influence et de perception entre différents niveaux. Ainsi, la fonction $Behavior_a^l$ d'un agent $a \in A_l$ est définie par :

$$Behavior_a^l : \prod_{l_P \in N_P^+(l)} \Delta^{l_P} \mapsto \prod_{l_I \in N_I^+(l)} \Gamma^{l_I}. \quad (1.17)$$

Cette fonction est définie comme la composition de trois fonctions :

$$Behavior_a^l = Decision_a^l \circ Memorization_a \circ Perception_a^l, \quad (1.18)$$

où

$$Perception_a^l : \prod_{l_P \in N_P^+(l)} \Delta^{l_P} \mapsto \prod_{l_P \in N_P^+(l)} P_a^{l_P}, \quad (1.19)$$

$$Memorization_a : \prod_{l \in L | ha \in A_l} \prod_{l_P \in N_P^+(l)} P_a^{l_P} \times S_a \mapsto S_a, \quad (1.20)$$

$$Decision_a^l : S_a \mapsto \prod_{l_I \in N_I^+(l)} \Gamma^{l_I}. \quad (1.21)$$

La fonction $Perception_a^l$ transforme l'état "brut" de l'environnement en "percepts" pouvant être traités directement par les fonctions de mémorisation et de décision.

La fonction $Memorization_a$ met à jour l'état global de l'agent en fonction de ses perceptions. Elle est définie de façon générale et ne correspond pas à un niveau particulier. En effet, nous considérons qu'un agent peut posséder de multiples états locaux (pouvant représenter différents "corps") mais seulement un état global (pouvant représenter la "mémoire" de l'agent), comme dans d'autres méta-modèles

de SMA (*e.g.*, MASQ [76]).

L'environnement ω d'un niveau l produit des influences avec la fonction :

$$Natural_{\omega}^l : \Delta^l \mapsto \prod_{l_I \in N_I^+(l)} \Gamma^{l_I}. \quad (1.22)$$

Réaction aux influences Lorsque la phase de production d'influences est terminée, la réaction à ces influences peut être traitée de façon indépendante pour chaque niveau. Ainsi, la fonction de réaction définie par :

$$Reaction^l : \Sigma^l \times \Gamma^{l'} \mapsto \Delta^l, \quad (1.23)$$

où $Reaction^l$ est la fonction de réaction correspond au niveau l .

La fonction de réaction est bien souvent l'une des parties d'un modèle les plus difficiles à développer. Dans l'implémentation développée au LGI2A³, elle est simplifiée par l'application d'une méthodologie stricte inspirée par l'approche orientée interaction [39].

1.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre des généralités autour de la simulation stochastique puis une introduction rapide à la simulation multi-agents, en particulier via le méta-modèle SIMILAR. La méthode MC est classiquement utilisée dans le cadre des simulations stochastiques, toutefois elle n'est pas adaptée lorsque nous nous intéressons aux solutions peu fréquentes.

Deux politiques d'exécution de simulations stochastiques "intelligentes" - Splitting et Importance Sampling - ont été introduites. Elles sont cependant difficilement applicables dans le cas général et celui des simulations multi-agents en particulier. En effet, les systèmes d'intérêt étudiés en simulation multi-agents sont en général complexes. Il est donc difficile de manipuler le générateur de variables aléatoires sans effectuer une analyse préliminaire. De plus, connaître la chaîne d'événements conduisant aux phénomènes émergents est souvent l'objectif des simulations multi-agents. Ces contraintes nous amènent à développer une nouvelle

3. <https://github.com/gildasmorvan/similar>

politique d'exécution qui nécessite peu (voire pas) de connaissance sur le modèle et efficace en terme d'estimation par rapport au coût de calcul.

Nous présenterons dans le chapitre suivant les différentes techniques de partitionnement, qui ont un rôle important sur la nouvelle politique d'exécution que nous allons proposer.

Partitionnement de données

Sommaire du présent chapitre

2.1	Introduction	28
2.2	Généralités sur le partitionnement de données dans un espace métrique	28
2.2.1	Objectif	28
2.2.2	Mesures de distance	29
2.2.3	Extraction de caractéristiques	31
2.3	Partitionnement par centroïdes	32
2.3.1	K-means	33
2.3.2	K-médoïdes	34
2.4	Partitionnements hiérarchiques	34
2.4.1	Méthode agglomérative	35
2.4.2	Méthode divisive	35
2.5	Partitionnements par densités	36
2.5.1	Mean-shift	36
2.5.2	DBSCAN	37
2.6	Conclusion	37

2.1 Introduction

Nous avons vu que l'état d'une simulation stochastique à un instant t est représenté par un vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$. Si nous réalisons n répliques, nous obtenons donc n points dans le domaine $\mathcal{D}$ du vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t$. Au cours d'une simulation d'un ensemble de répliques, il peut être intéressant, comme nous le verrons dans les prochains chapitres, de sélectionner les plus intéressantes afin d'étudier des grandes tendances. Cette sélection peut être faite via regroupement des répliques les plus similaires, qui peut être réalisé grâce à des algorithmes de partitionnement de données (aussi dits de clustering) [1], [34].

Dans ce chapitre, nous présenterons différentes approches existantes de partitionnement de données dans un espace métrique $E = (\mathcal{D}, d)$ avec d une distance associée.

2.2 Généralités sur le partitionnement de données dans un espace métrique

2.2.1 Objectif

L'objectif du partitionnement de données que nous considérons est de diviser un *ensemble de points* F , dans un *espace métrique* E muni d'une *distance* d , en plusieurs sous-ensembles (*clusters*) de points qui forment une *partition* de F . Un exemple d'assignation des points est illustré dans la figure 2.1.

Généralement, nous souhaitons que ces clusters soient :

- homogènes, c'est-à-dire que les points situés dans un même cluster devraient être les plus similaires possibles,
- et distinctifs, c'est-à-dire que les clusters devraient être les plus différents les uns des autres.

Différentes approches ont été développées dans la littérature pour partitionner un ensemble de points [1], [34]. De ces dernières, nous pouvons mettre en avant trois familles principales classiques :

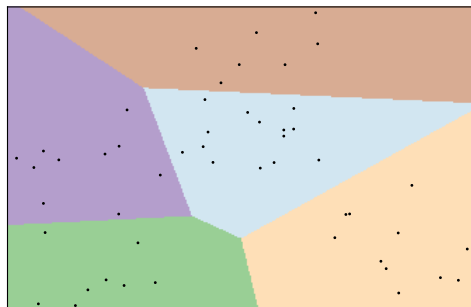


FIGURE 2.1 – Illustration d'un exemple de partitionnement en 5 clusters d'un nuage de 50 points en 2 dimensions.

- les approches orientées "centroïde" (K-means et ses variantes) où chaque cluster possède un centre ou centroïde, représentatif du cluster avec une différence moyenne avec tous les objets du cluster qui est minimale,
- les approches "hiérarchiques" (Clustering hiérarchique agglomératif ou par division) basées sur la construction d'un arbre hiérarchique issu des distances deux à deux des points à partitionner,
- les approches orientées "densité" (Clustering basé sur la densité type Mean-shift ou DBSCAN) où un cluster est une région de points denses séparée des autres clusters par des régions moins denses.

Ces familles classiques sont illustrées sur la figure 2.2.

2.2.2 Mesures de distance

Toutes les familles de méthodes de clustering mentionnées précédemment nécessitent l'emploi d'une mesure de distance. La plus utilisée dans le cas général est la distance euclidienne définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2} \quad (2.1)$$

où $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ sont deux points de l'espace E .

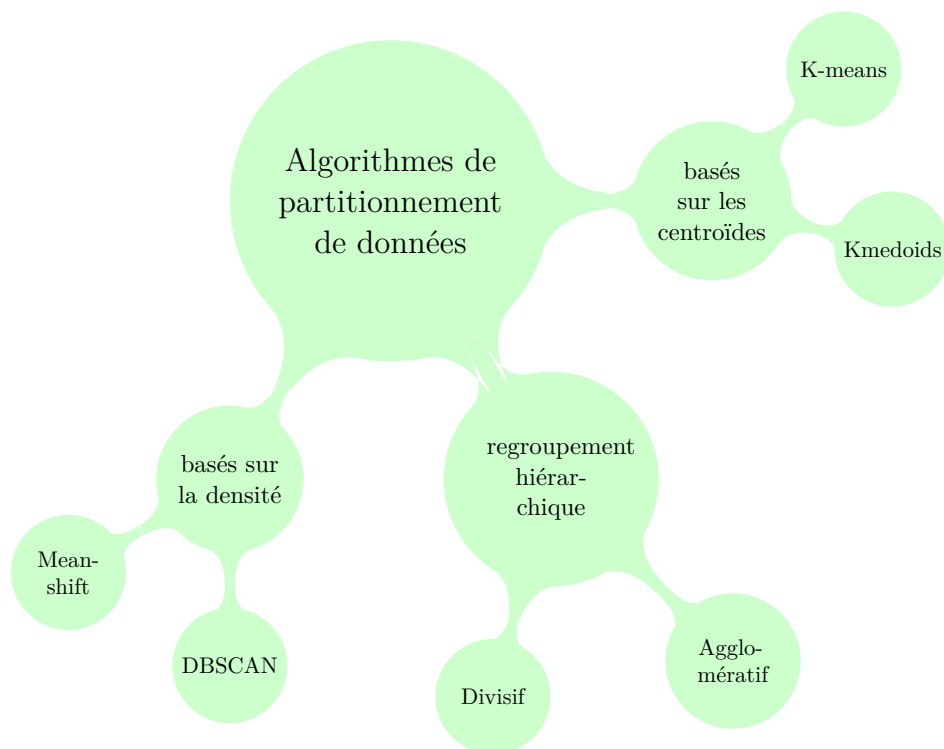


FIGURE 2.2 – Carte mentale des algorithmes classiques de partitionnement de données.

Dans le cas où les données sont des séries temporelles, il est possible d'utiliser des mesures de distance plus fines comme *Distance Time Warping* (DTW) [73] (ou une variante comme Soft DTW [14]) prenant en compte les éventuels déphasages entre les séries. Néanmoins, de telles distances nécessitent un coût de calcul bien plus important que la distance euclidienne ce qui les rend incompatibles avec l'approche que nous proposons dans le chapitre 3. Aussi, dans la suite de ce travail, seule la distance euclidienne sera utilisée.

Une autre chose à prendre en considération lorsque l'on réalise un clustering, est la taille de l'espace E des données à partitionner. Aussi, avant de présenter les méthodes classiques de clustering avec plus de détails dans la suite de ce chapitre, nous abordons dans la section suivante la question de l'extraction de caractéristiques à partir de données brutes avant de réaliser le partitionnement.

2.2.3 Extraction de caractéristiques

La dimension de l'espace des données brutes E peut être très grande, ce qui complique le partitionnement et la visualisation des données. L'objectif de l'extraction des caractéristiques est alors de diminuer cette taille en déterminant les variables ou les combinaisons de variables ayant l'impact le plus fort sur les résultats du processus de clustering.

La méthode la plus simple est l'analyse en composantes principales (ACP) qui vise à transformer la base actuelle de l'espace en une nouvelle base dans laquelle les composantes sont moins corrélées les unes des autres [31]. Quelques composantes, les plus importantes, suffisent souvent à faciliter les traitements. Néanmoins, Les nouvelles coordonnées issues d'une ACP ne peuvent être qu'une combinaison linéaire des coordonnées de la base initiale.

D'autres méthodes comme la transformée de Fourier ou en ondelettes peuvent également être utilisées, notamment sur des séries temporelles ou des images [26], [45].

Auto-encodeurs Une méthode plus riche, permettant des transformations non linéaires, est l'approche par auto-encodeurs reposant sur les réseaux de neurones profonds [28], [72].

L'idée fondamentale est de construire un réseau de neurones ayant une entrée et une sortie de même dimension que les données à traiter. Le réseau possède une couche intermédiaire cachée h de dimension réduite. Le réseau est composé de deux parties :

- l'encodeur f : un sous-réseau du réseau principal entre l'entrée et la couche h .
- le décodeur g : un sous-réseau du réseau principal entre la couche h et la sortie.

L'architecture générale du réseau est illustrée dans la figure 2.3.

L'auto-encodeur doit alors pouvoir, à l'aide de l'encodeur f , extraire les caractéristiques $h = f(x)$ d'un point x et reconstruire un point $\tilde{x}$ ressemblant le plus possible au point x à partir de h à l'aide du décodeur $\tilde{x} = g(h)$. Afin de calibrer les paramètres du réseau pour satisfaire le plus possible $x = g(f(x))$, le processus d'apprentissage minimise une fonction de perte $L(x, g(f(x)))$ pénalisant la différence entre x et $g(f(x))$ (*e.g.* erreur quadratique moyenne).

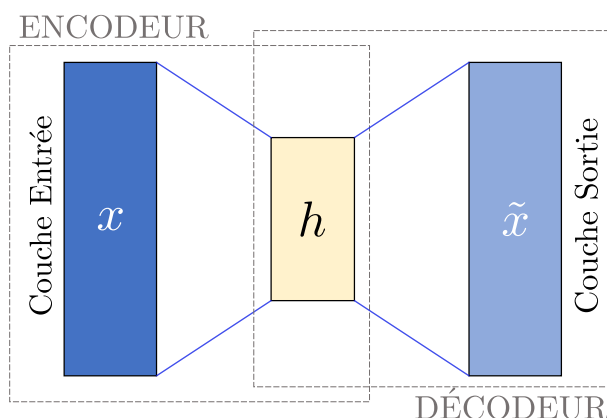


FIGURE 2.3 – Illustration simple de l'architecture d'un auto-encodeur.

2.3 Partitionnement par centroïdes

Le partitionnement par centroïdes est une approche très simple et rapide, consistant à déterminer les centres de nuages de points (clusters) dans l'espace

minimisant l'inertie intra-classe W de chaque cluster :

$$W = \sum_{k=0}^K I(C_k) \quad (2.2)$$

$$I(C_k) = \sum_{x_i \in C_k} w_i d(x_i, c)^2 \quad (2.3)$$

où $I(C_k)$ est l'inertie du cluster C_k , w_i le poids du point x_i et c le centre du cluster C_k .

Résumé dans l'algorithme 1), ce type de partitionnement nécessite de connaître le nombre K de clusters voulu.

Algorithme 1 : Partitionnement par centroïdes

input : DB : n points $(p_1, \dots, p_n)$;

$K \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq K \leq n$: le nombre de clusters voulu.

On assigne aléatoirement K points comme les centres de K clusters

while *les assignations varient pendant l'itération* **do**

foreach p_i **do**

 on cherche le centre le plus proche de p_i puis on l'assigne au cluster correspondant

end

 on réévalue le centre pour chaque cluster

end

output : Les assignations de chaque point

Dans la suite de cette section, nous présentons les algorithmes de partitionnement par centroïdes K-means et K-médoïdes, qui se distinguent par le choix du centre.

2.3.1 K-means

Le partitionnement K-means est une méthode classique bien étudiée [1], [34], dans laquelle le centre choisi est le barycentre minimisant l'inertie d'un cluster C_k .

Cependant, le choix initial des centres peut potentiellement impacter le résultat final et la vitesse de convergence. Aussi l'algorithme est relancé généralement plusieurs fois pour ne garder que le meilleur résultat en terme d'inertie.

L'algorithme K-means++ [2], une amélioration de K-means, permet également d'améliorer la vitesse de convergence et la précision des résultats obtenus en sélectionnant mieux les centres de départ.

Le nombre K de clusters voulu peut aussi influencer la qualité du partitionnement. Si nous ne disposons pas de connaissances portant sur le nombre de clusters sur les données à traiter, plusieurs valeurs de K peuvent être testées afin de trouver un meilleur partitionnement [70], [78].

2.3.2 K-médoïdes

La méthode K-means décrite précédemment est bien connue et fréquemment utilisée. Néanmoins, à chaque itération, les centres de clusters sont déterminés par le barycentre et sont donc, dans la plupart du temps, des points fictifs dans l'espace. L'algorithme K-médoïdes évite cela en sélectionnant un point réel, le médoïde, c'est-à-dire, pour un cluster donné, le point minimisant l'inertie de celui-ci. [46].

Nous pouvons remarquer que pour déterminer le médoïde d'un cluster, il faut d'abord parcourir l'ensemble de ses points. La complexité est donc supérieure à celle de K-means. En contrepartie, la méthode K-médoïdes est beaucoup moins sensible à la présence de points aberrants (outliers) car les médoïdes sont des points réels. En revanche, l'inertie intra-classe est supérieure à celle de K-means car le barycentre est plus performant pour réduire l'inertie des clusters.

2.4 Partitionnements hiérarchiques

Il existe deux catégories de clustering par regroupement hiérarchique selon le sens de fonctionnement : ascendant¹ (méthode agglomérative) et descendant² (méthode divisive). La première se focalise sur la formation d'une hiérarchie en construisant un arbre issu des distances deux à deux des points à partitionner. La seconde consiste à diviser d'une manière récursive l'ensemble de points F . Le résultat d'un tel clustering est souvent représenté par des dendrogrammes (cf.

1. bottom-up

2. top-down

figure 2.4). Nous présentons par la suite les détails de ces deux méthodes.

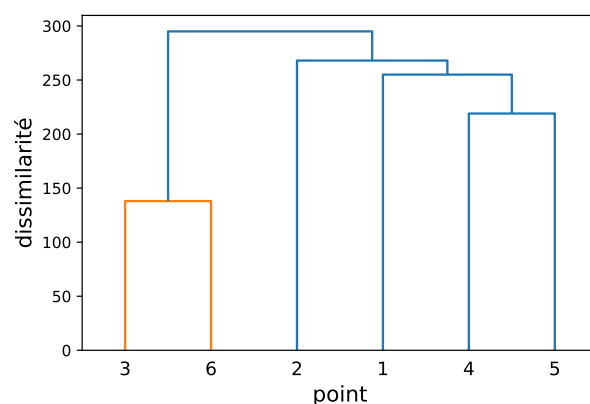


FIGURE 2.4 – Exemple d’une représentation de partitionnement en dendrogramme.

2.4.1 Méthode agglomérative

La méthode agglomérative (ou classification hiérarchique ascendante) consiste à d’abord associer chaque point à un cluster (contenant donc un seul élément). Puis, à chaque itération, le nombre total de cluster est décrémenté en regroupant les deux clusters les plus proches jusqu’à obtenir un seul cluster contenant tous les points (d’où le nom d’ascendant). Pour réaliser ces itérations, nous avons besoin d’une mesure de dissimilarité inter-classe³ permettant de déterminer la distance entre deux clusters contenant plus d’un élément. Parmi plusieurs mesures de dissimilarité existantes, le critère de *Ward* est l’un des plus utilisés. Celui-ci a pour but de minimiser la variance des clusters fusionnés [61].

2.4.2 Méthode divisive

La méthode divisive (ou classification hiérarchique descendante) est similaire à la méthode agglomérative mais en inversant le sens : nous commençons par un cluster contenant tous les points avec pour objectif final d’avoir n clusters contenant un seul élément. Cette méthode est plus compliquée par rapport à la précédente

3. linkage criteria en anglais

car séparer un groupe de points en plusieurs petits groupes est également un processus de clustering. Nous pouvons par exemple considérer la méthode K-means pour réaliser cette étape.

2.5 Partitionnements par densités

L'idée du partitionnement par densité est de déterminer les régions les plus denses de l'espace E . Nous présentons dans la suite deux exemples de ces méthodes se distinguant dans la méthode de recherche de ces régions : Mean-shift [27] et DBSCAN [22].

2.5.1 Mean-shift

La méthode Mean-shift [27] est une méthode itérative dont le but est de trouver les zones les plus denses possibles de l'espace. En partant d'un point quelconque x , on souhaite déterminer d'une manière itérative un point dont le voisinage est plus dense (*i.e.* contenant plus de points) que le point de départ x . Pour ce faire, il faut d'abord définir un rayon r de voisinage et une fonction noyau $K(x_i - x)$ pour définir le poids d'un point x_i qui se situe au voisinage $V(x)$ du point x . On peut ensuite calculer la moyenne pondérée des points dans ce voisinage :

$$m(x) = \frac{\sum_{x_i \in V(x)} K(x_i - x)x_i}{\sum_{x_i \in V(x)} K(x_i - x)} \quad (2.4)$$

La différence $m(x) - x$ est appelée mean-shift, d'où le nom de la méthode. En remplaçant le point de départ x par $m(x)$, on peut répéter l'itération jusqu'à convergence.

La méthode Mean-shift consiste à réaliser ce processus itératif sur un ensemble de points fictifs G uniformément distribués dans l'espace. Lorsque les itérations pour chaque points de G sont terminées, nous obtenons quelques points finaux qui seront les centres des clusters. Les points de l'ensemble F sont donc assignés au cluster dont le centre est le plus proche d'eux. L'avantage de cette méthode est que le nombre de clusters K peut rester inconnu pendant le processus. Cependant, la détermination du rayon r est plus délicat.

2.5.2 DBSCAN

L'idée principale de la méthode DBSCAN (de l'anglais "Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise") [22], [74] (résumée dans l'Algorithme 2) est de visiter chaque point de l'espace à partitionner selon deux paramètres : un rayon de voisinage ϵ et un nombre minimum de points *MinPoints* que doit comporter un cluster. Pour chaque point p de l'espace, si dans son voisinage de rayon ϵ (ϵ -voisinage) il y a au moins *MinPoints* points (l' ϵ -voisinage est alors dit dense), alors un nouveau cluster affecté à ce point est créé (sinon le point est étiqueté comme aberrant, il pourra par la suite être rattaché possiblement à un cluster s'il est présent dans un ϵ -voisinage). Ensuite, son ϵ -voisinage fait également partie de ce cluster : tous les points qui se trouvent dans le ϵ -voisinage de p sont ajoutés à ce cluster, ainsi que leurs propres ϵ -voisinages s'ils sont également denses, et ainsi de suite jusqu'à ce que le cluster connecté par densité soit complètement trouvé. Lorsque tous les points sont visités, on aura plusieurs clusters et quelques points n'appartenant à aucun cluster : les points aberrants ou outliers.

2.6 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre le fonctionnement général du processus de partitionnement de données. Trois familles différentes d'algorithmes de partitionnement ont été décrites ainsi que leurs implémentations classiques. Parmi ces algorithmes, deux d'entre eux, K-means et DBSCAN, demeurent particulièrement populaires en raison de leur simplicité et de certaines caractéristiques propres :

- DBSCAN permet de détecter automatiquement des anomalies comme l'existence de points aberrants et ne nécessite pas de fixer le nombre de clusters K en amont,
- K-means est quant à lui reconnu pour son efficacité dans le cas où les clusters sont sphériques ou convexes de tailles à peu près similaires.

Nous présenterons dans la seconde partie de cette thèse une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques mettant en œuvre un algorithme de partitionnement de données. Elle sera ensuite évaluée dans le cadre de simulations multi-agents.

Algorithme 2 : DBSCAN sur n points

input : DB : n points $(p_1, \dots, p_n)$;
 $\epsilon \in \mathbb{R}$: rayon;
 $MinPts$: le nombre minimum de points dans un cluster.
 label : l'étiquette (label) de chaque point, initialisée par défaut à indéfini
foreach point p **do**
 if $label(p) \neq indéfini$ **then** continue;
 $N \leftarrow voisins(DB, p, \epsilon)$;
 if $|N| < MinPts$ **then**
 label(p) $\leftarrow$ Aberrant;
 end
 $c \leftarrow$ prochaine étiquette de cluster;
 label(p) $\leftarrow c$;
 $S \leftarrow N \setminus \{p\}$;
 foreach $q \in S$ **do**
 if $label(q) = Aberrant$ **then** label(q) $\leftarrow c$;
 if $label(q) \neq indéfini$ **then** continue;
 $N \leftarrow voisins(DB, q, \epsilon)$;
 label(q) $\leftarrow c$;
 if $|N| < MinPts$ **then** continue;
 $S \leftarrow S \cup N$;
 end
end
output : label

Deuxième partie

Contributions

Chapitre 3

Proposition d'une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques

Sommaire du présent chapitre

3.1 Introduction	41
3.2 Généralités et concepts	43
3.2.1 Proposition d'une nouvelle politique d'exécution . . .	43
3.2.2 Estimation de la probabilité de solutions	44
3.3 Implémentation de SPSC	47
3.3.1 Mise en oeuvre sur la plateforme Similar	47
3.3.2 Paramétrage de SPSC	47
3.3.3 Coût de calcul	49
3.4 Conclusion	50

3.1 Introduction

Nous avons vu dans la section 1.4 que la méthode Monte-Carlo peut être adaptée à des solutions peu fréquentes et que des alternatives existantes, comme *splitting* et *importance sampling*, présupposent des connaissances a priori sur le modèle (*e.g.*, sur les distributions de probabilités) et des contraintes sur sa na-

ture (modèle de Markov). Dans le cas général, et notamment dans les simulations multi-agents, nous ne disposons pas nécessairement de telles connaissances et ces contraintes sont rarement vérifiées.

Notre objectif est donc de développer une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques, qui, pour un coût de calcul fixe, permet d'estimer avec une bonne précision les probabilités d'apparition de solutions, rares ou non, tout en considérant les simulations comme des *boîtes noires*, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire d'introduire des connaissances a priori sur le modèle ou les solutions recherchées. L'idée générale est de contraindre l'évolution des répliques en sélectionnant et en clonant périodiquement celles qui semblent les plus adaptées pour favoriser les trajectoires pouvant conduire à des solutions d'intérêt.

Intuitivement, la méthode la plus simple pour sélectionner les répliques les plus adaptées consiste à élaborer une fonction objectif permettant de caractériser et d'évaluer les différentes trajectoires. Nos premiers travaux ont ainsi exploré cette piste [32]. Néanmoins, construire cette fonction objectif nécessite des connaissances a priori sur les solutions et peut être très complexe dans le cas général. Il se peut également que le modélisateur n'ait aucune idée des solutions possibles. C'est pourquoi nous avons par la suite remplacé la fonction objectif par un algorithme d'apprentissage non supervisé [33].

La méthode que nous proposons s'inspire de différentes approches existantes comme les techniques de splitting présentées dans la section 1.4.1 mais peut aussi évoquer des méthodes ayant des objectifs différents comme les algorithmes génétiques¹.

Néanmoins, elle en diffère sur de nombreux points :

- contrairement aux techniques de splitting, l'échantillonnage des répliques se fait dans le temps et non dans l'espace des solutions et n'est pas non plus conditionné par un niveau de rareté prédéfini ;

1. Rappelons que ces algorithmes, permettant d'obtenir une solution approchée à un problème d'optimisation, reposent sur l'idée suivante : une solution peut être vue comme un individu, plus ou moins bien adapté au problème posé, au sein d'une population. En s'inspirant de l'évolution génétique, on peut ainsi faire évoluer itérativement une population initiale de solutions générées aléatoirement en sélectionnant les plus adaptées, puis en croisant celles-ci et les faisant muter avec une faible probabilité afin d'obtenir, après de nombreuses générations, une population de solutions bien "adaptées", *i.e.*, de bonnes qualités [30].

- de plus, contrairement aux algorithmes génétiques, cette nouvelle politique d'exécution n'intègre pas de fonction d'évaluation ni de mutation, l'évolution étant dirigée par la simulation et la sélection par un algorithme d'apprentissage non supervisé.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons tout d'abord cette nouvelle politique de façon générale, puis son implémentation.

3.2 Généralités et concepts

La politique d'exécution proposée a été nommée SPSC, selon les initiales des différentes étapes du processus : **S**imulation, **P**artitionnement, **S**élection et **C**lonage.

3.2.1 Proposition d'une nouvelle politique d'exécution

Principe de l'approche proposée Au lieu d'exécuter les réplifications de t_0 à t_f , nous proposons de découper l'intervalle temporel $[t_0, t_f]$ en S intervalles $[t_{(i)}, t_{(i+1)}]$, $i = 0, \dots, S - 1$, tels que

$$[t_0, t_f] = \bigcup_{i=0}^{S-1} [t_{(i)}, t_{(i+1)}] \quad (3.1)$$

et

$$[t_{(i)}, t_{(i+1)}] \cap [t_{(j)}, t_{(j+1)}] = \begin{cases} t_{(i+1)} & \text{si } j = i + 1, \\ [t_{(i)}, t_{(i+1)}] & \text{si } j = i, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$t_{(0)} = t_0 \text{ et } t_{(S)} = t_f . \quad (3.3)$$

Ensuite, pour chaque intervalle $[t_{(i)}, t_{(i+1)}]$, on applique les étapes suivantes, illustrées par la figure 3.1 :

Simulation : Faire évoluer les états de N réplifications de $t_{(i)}$ jusqu'à $t_{(i+1)}$.

Partionnement : Au pas de temps $t_{(i+1)}$, extraire d'abord des observables à partir des états de ces N réplifications, puis partitionner ces N réplifications selon ces observables en K sous-ensembles.

Sélection : Sélectionner une ou plusieurs réplifications représentatives de chaque sous-ensemble. Ensuite, éliminer les réplifications non sélectionnées.

Clonage : Finalement, cloner les réplifications sélectionnées pour revenir à N réplifications au total (afin de contrôler le coût de calcul).

Lorsque les réplifications arrivent au pas de temps t_f , on peut alors analyser les résultats et notamment estimer les probabilités des différentes solutions. La figure 3.2 représente une illustration détaillant les étapes issues des deux premiers découpages.

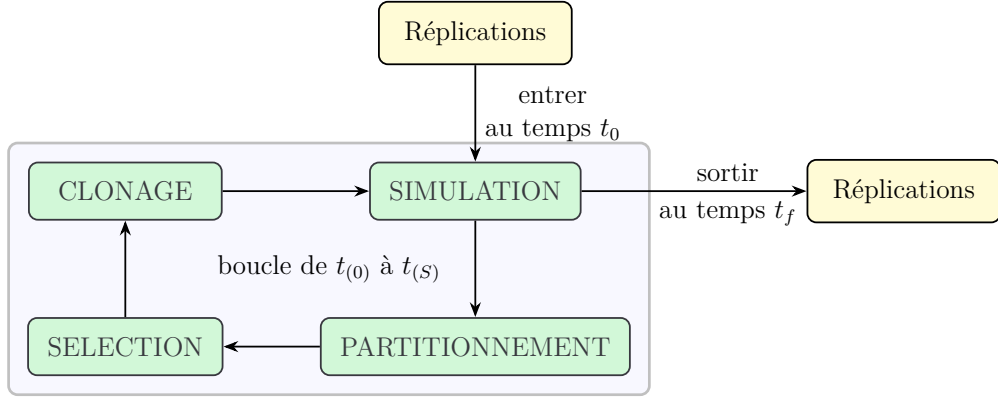


FIGURE 3.1 – Diagramme de la politique d'exécution proposée.

3.2.2 Estimation de la probabilité de solutions

Comme mentionné dans la section 1.3, nous nous intéressons principalement à l'estimation de la probabilité des solutions d'intérêt pour le modélisateur au pas de temps final t_f . Nous rappelons ici quelques notations : les observables d'une réplification à t_f sont représentés par un vecteur aléatoire $\mathbf{X}_{t_f}$, la solution particulière d'intérêt est dénotée par $\mathcal{S}$, sa probabilité par $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S})$ et l'estimateur de sa probabilité par $\hat{\theta}_{\mathcal{S}}$.

L'estimateur classiquement utilisé dans le cadre de la méthode MC est celui du maximum de vraisemblance constitué de N échantillons $\mathbf{X}_{t_f}^1, \dots, \mathbf{X}_{t_f}^N$ du vecteur

aléatoire $\mathbf{X}_{t_f}$ (Équation (1.1)) :

$$\hat{\theta}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}_{t_f}^i)$$

Cependant, celui-ci ne peut pas être appliqué à la politique d'exécution que nous proposons car certaines répliques sont éliminées en cours de simulation et remplacées par des clones. Nous proposons donc un estimateur adapté à notre approche, basé sur la décomposition de la probabilité d'intérêt et sa reconstruction.

Décomposition de la probabilité d'intérêt La probabilité théorique $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S})$ peut être décomposée à l'aide de la formule des probabilités totales. En considérant un pas de temps intermédiaire j , nous pouvons réécrire cette probabilité par :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S}) = \sum_{\mathcal{S}_j \in \mathcal{P}_j} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S} | \mathbf{X}_j \in \mathcal{S}_j) \mathbb{P}(\mathbf{X}_j \in \mathcal{S}_j) \quad (3.4)$$

où $\mathcal{P}_j$ est une partition de l'espace de la variable d'état $\mathbf{X}_j$.

Plus généralement, en supposant que le système étudié est markovien, où $\mathbf{X}_i$ ne dépend que de $\mathbf{X}_{i-1}$, la décomposition peut donc être étendue :

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S}) = \sum_{\substack{\mathcal{S}_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1} \\ \vdots \\ \mathcal{S}_1 \in \mathcal{P}_1}} \prod_{i=0}^{m-1} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{i+1} \in \mathcal{S}_{i+1} | \mathbf{X}_i \in \mathcal{S}_i) \quad (3.5)$$

où $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, m-1$ est la partition de l'espace de la variable d'état $\mathbf{X}_i$, $\mathcal{S}_T = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ sont les états initiaux de la simulation.

Reconstitution des estimateurs de probabilités des solutions Nous présentons ici, étape par étape, une méthode permettant de calculer l'estimateur de $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S})$ en s'inspirant de la décomposition de la probabilité présentée dans l'équation (3.5) avec les éléments obtenus par SPSC.

Une fois les itérations de SPSC terminées, nous avons, pour chaque pas de temps intermédiaire $t_{(i)}$, créé une partition $\mathcal{P}_{(i)}$ pour l'espace de variable d'états

$\mathbf{X}_{t_{(i)}}$. Pour un élément $\mathcal{S}_{(i)}$ de la partition $\mathcal{P}_{(i)}$, après les étapes de sélection et de clonage, n_i répliques ont ainsi été clonées. Ensuite, parmi ces n_i répliques clonées, certaines d'entre elles (n_{i+1}) vont être associées à un élément $\mathcal{S}_{(i+1)} \in \mathcal{P}_{(i+1)}$ après l'étape de partitionnement au pas de temps $t_{(i+1)}$. Les nombres n_i et n_{i+1} peuvent donc être utilisés pour approximer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_{(i+1)}} \in \mathcal{S}_{(i+1)} | \mathbf{X}_{t_{(i)}} \in \mathcal{S}_{(i)})$ par :

$$\hat{P}(\mathbf{X}_{t_{(i+1)}} \in \mathcal{S}_{(i+1)} | \mathbf{X}_{t_{(i)}} \in \mathcal{S}_{(i)}) = \frac{n_{i+1}}{n_i} \quad (3.6)$$

Finalement, nous pouvons définir un nouvel estimateur $\hat{\theta}_{\mathcal{S}}$ pour $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S})$ par une décomposition similaire à l'équation (3.5) à l'aide de l'équation (3.6) :

$$\hat{\theta}_{\mathcal{S}} = \sum_{\substack{\mathcal{S}_{(m-1)} \in \mathcal{P}_{(m-1)} \\ \vdots \\ \mathcal{S}_{(1)} \in \mathcal{P}_{(1)}}} \prod_{i=0}^{m-1} \hat{P}(\mathbf{X}_{t_{(i+1)}} \in \mathcal{S}_{(i+1)} | \mathbf{X}_{t_{(i)}} \in \mathcal{S}_{(i)}) \quad (3.7)$$

où $\mathcal{S}_{(m)} = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_{(0)} = \mathcal{S}_0$.

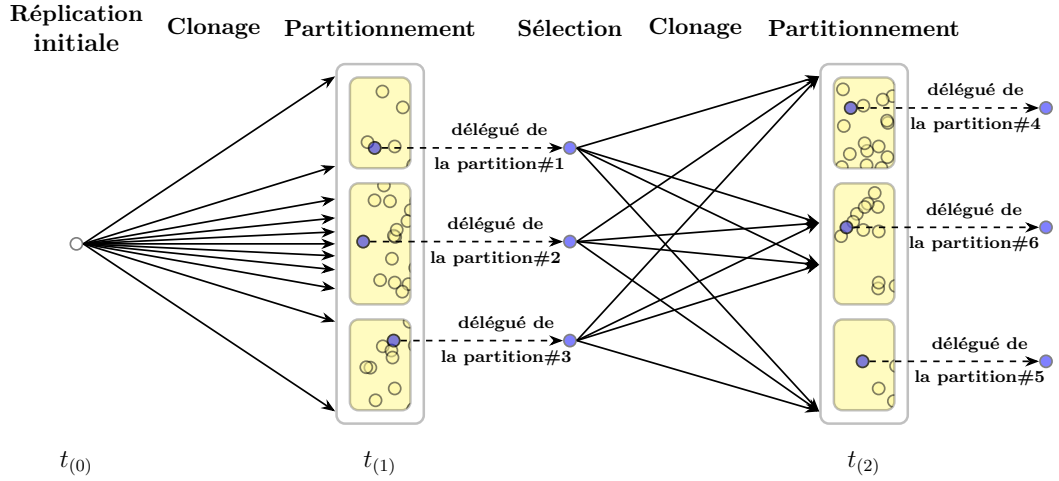


FIGURE 3.2 – Détail du processus pour le premier et le deuxième découpage $[t_{(0)}, t_{(2)}]$.

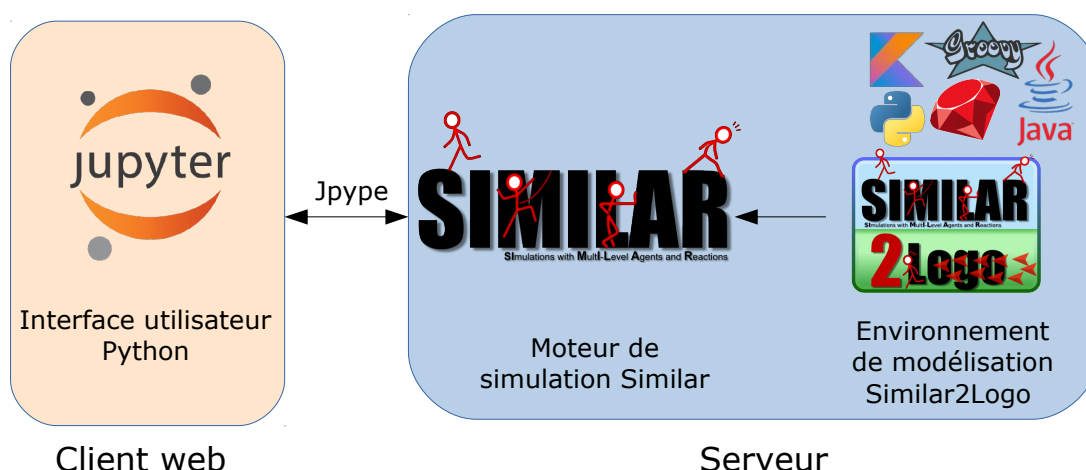


FIGURE 3.3 – Architecture de l’application développée.

3.3 Implémentation de SPSC

3.3.1 Mise en oeuvre sur la plateforme Similar

L’implémentation de SPSC développée dans le cadre de cette thèse a été conçue pour s’interfacer avec le moteur de simulation SIMILAR. Elle est codée en Python afin de bénéficier des bibliothèques avancées d’apprentissage automatique disponibles dans ce langage comme Scikit-learn [64] ou Keras [11]. Par ailleurs, d’un point de vue génie logiciel, la séparation stricte entre l’interface utilisateur, l’implémentation de SPSC et le moteur de simulation permet d’envisager son utilisation dans le cadre d’autres plateformes de simulation. L’architecture de l’application développée est illustrée dans la figure 3.3.

3.3.2 Paramétrage de SPSC

Les paramètres principaux de la politique d’exécution SPSC sont :

1. N le nombre total de répliques utilisées dans la simulation.
2. la période de découpage temporel.
3. les paramètres des méthodes de clustering (comme le nombre K de clusters).

Outre ces paramètres principaux, l’approche SPSC dépend de différentes procédures qui seront décrites dans les sections suivantes.

3.3.2.1 Méthodes d'extraction des caractéristiques

Nous avons vu dans la section 2.2.3 que si les données issues des répliques sont de grande dimension, il peut être nécessaire d'extraire leurs caractéristiques préalablement à l'étape de partitionnement afin que celle-ci soit plus efficace. Deux méthodes seront utilisées ici :

1. utilisation des données brutes,
2. transformation des données brutes à l'aide d'un auto-encodeur afin d'obtenir un vecteur de dimension réduite [28].

3.3.2.2 Méthodes de partitionnement

L'objectif de l'étape de partitionnement est de regrouper ces N répliques en K ensembles. Pour atteindre cet objectif, nous pouvons appliquer un clustering sur les caractéristiques extraites des N répliques. Nos expérimentations reposent sur des implémentations existantes des méthodes de clustering décrites dans le chapitre 2. Elles sont résumées dans le tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 – Implémentations des méthodes de clustering utilisées.

méthode	implémentation
K-means	
Agglomérative	[64]
DBSCAN	
K-médoides	[36]
ts-K-means ²	[77]

3.3.2.3 Méthodes de sélection

Lorsque l'étape de partitionnement est achevée, les N répliques sont séparées en une partition $\mathcal{P}$ à K éléments. Pour chaque élément de la partition $\mathcal{P}$, nous sélectionnons une réplique déléguée pour représenter l'ensemble des répliques

2. ts-K-means est une variante de K-means adaptée aux séries temporelles.

de cet élément. Les différentes méthodes de sélection de délégués mises en oeuvre ici sont les suivantes :

Centroïde : Nous calculons le centre d'un cluster (*i.e.* la moyenne des points appartenant au cluster). Ensuite nous sélectionnons le point le plus proche du centre.

Médoïde : Méthode propre au K-médoïdes. Nous sélectionnons directement le médoïde.

3.3.2.4 Méthodes de clonage

A l'issue de l'étape de sélection, chaque élément de la partition $\mathcal{P}$ possède un délégué. Seuls ces K délégués seront conservés pour la suite de simulation. Afin de maintenir un coût de calcul fixe, les délégués sont clonés afin d'obtenir un nombre de N réplifications au total. La méthode équilibre, appelée ainsi car elle vise à obtenir des nombres de clones les plus égaux possibles pour chaque délégué, a été utilisée ici :

Équilibre Chaque délégué est cloné $\lfloor \frac{N}{K} \rfloor$ fois pour avoir au total N réplifications. Dans le cas où N ne divise pas K , certains délégués, choisis aléatoirement, seront clonés $\lfloor \frac{N}{K} \rfloor + 1$ fois.

3.3.3 Coût de calcul

Dans la suite de cette thèse, nous comparons les performances de MC et SPSC pour un même nombre total de réplifications N . Il est à noter que SPSC implique des coûts supplémentaires pour exécuter l'algorithme de clustering et cloner des réplifications comme illustré dans la figure 3.4). Néanmoins, ces coûts supplémentaires sont souvent négligeables par rapport au temps de calcul nécessaire à la simulation de systèmes complexes.

A titre d'exemple, nous présentons dans le tableau 3.2 une comparaison de ces coûts de calcul³ pour un modèle académique simple (proies prédateurs) qui sera présenté en détail dans le chapitre 4.

3. Calculs réalisés sur un ordinateur portable Apple Macbook pro début 2015 avec les caractéristiques suivantes : CPU Intel Core i5 bicoeur à 2,7 GHz et 8 Go de mémoire vive. Bibliothèques de microbenchmarking utilisées : JMH (simulation et clonage) et timeit (5-means, 15-means).

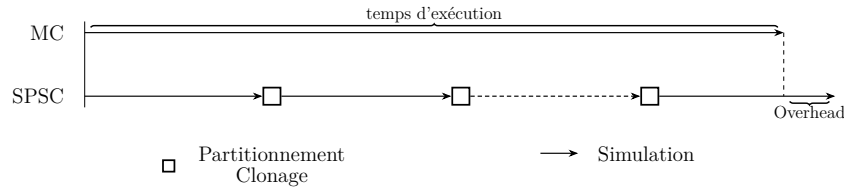


FIGURE 3.4 – Comparaison des coûts de calcul et des étapes de clonage et de partitionnement de SPSC.

TABLEAU 3.2 – Temps de calcul des différentes étapes de SPSC pour un modèle multi-agents proies prédateurs.

	temps de calcul
Simulation d'une réplcation (100 pas de temps)	270 ± 16 ms/op
Clonage d'une réplcation	2 ± 1 ms/op
Partitionnement ($N = 50, K = 5$, K-means)	19.9 ± 0.475 ms/op
Partitionnement ($N = 50, K = 15$, K-means)	42.8 ± 1.41 ms/op

3.4 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques appelée SPSC. Nous avons tout d'abord présenté son fonctionnement général puis son implémentation sur la plateforme SIMILAR. Un estimateur de probabilité permettant d'analyser les résultats obtenus a également été proposé et comparé à celui de la méthode MC.

La politique SPSC, telle que présentée dans la section 3.2.1, reste abstraite et générique, ce qui donne donc la possibilité d'envisager différentes implémentations pour les étapes de partitionnement et de sélection. Pour la première, plusieurs algorithmes de partitionnement classiques ont été considérés. Pour la seconde, nous n'avons retenu que la plus évidente pour des raisons de simplicité. Néanmoins, d'autres implémentations plus sophistiquées peuvent être envisagées selon l'objectif poursuivi : estimer avec une bonne précision les probabilités des différentes solutions (rares ou non), exploration de différentes solutions, etc.

Dans le chapitre suivant, nous évaluerons SPSC sur des modèles multi-agents, du plus simple au plus complexe.

Applications : Modèles multi-agents académiques

Sommaire du présent chapitre

4.1 Introduction	52
4.2 Mesures de performance	52
4.2.1 Évaluation d'une simulation	52
4.2.2 Comparaison de deux politiques d'exécution	54
4.3 Proies prédateurs	55
4.3.1 Présentation du modèle	55
4.3.2 Solutions	57
4.3.3 Expériences	58
4.3.4 Robustesse de l'approche SPSC	60
4.3.5 Discussion	62
4.4 Virus	65
4.4.1 Présentation du modèle	65
4.4.2 Solutions	67
4.4.3 Expériences	68
4.4.4 Discussion	71
4.5 Conclusion	75

4.1 Introduction

Nous avons proposé dans le chapitre précédent une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques appelée SPSC. Dans le présent chapitre, nous allons l'appliquer sur différents modèles afin d'évaluer ses performances comparativement à l'approche classique MC.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : nous allons tout d'abord présenter différents indicateurs permettant d'évaluer les performances d'une politique d'exécution. Ensuite, nous présenterons les résultats de deux expériences réalisées sur des modèles multi-agents académiques afin de mesurer les gains de performance de SPSC par rapport à MC.

4.2 Mesures de performance

Dans cette section, nous introduisons des mesures de performance permettant d'évaluer et de comparer différentes politiques d'exécution à partir des résultats obtenus.

Dans un premier temps nous introduisons des indicateurs mesurant ces performances pour une simulation (*i.e.* un lot de répliques). Ensuite, pour comparer deux politiques différentes, nous nous intéressons aux gains moyen de ces métriques pour deux ensembles de simulations.

4.2.1 Évaluation d'une simulation

Nous présentons ici les mesures dédiées aux résultats obtenus pour une simulation (un lot de N répliques).

Détection de solutions Étant donné une solution particulière $\mathcal{S}$, nous nous intéressons à la présence de cette solution parmi les N répliques exécutées. Nous considérons un simple indicateur booléen $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \begin{cases} 1 & \text{si une des répliques atteint } \mathcal{S} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Si un ensemble de solutions $\mathbb{S}$ est considéré, nous nous intéressons également au cas où un certain nombre $n \leq \text{Card}(\mathbb{S})$ de solutions sont atteintes simultanément :

$$\mathcal{B}_n(\mathbb{S}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists \bar{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \text{ tel que } \forall \mathcal{S} \in \bar{\mathbb{S}}, \mathcal{B}(\mathcal{S}) = 1 \text{ et } \text{Card}(\bar{\mathbb{S}}) \geq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Erreur d'estimation Pour évaluer l'estimateur $\hat{P}$ de la probabilité d'une solution $\mathcal{S}$ donnée, nous considérons l'erreur absolue :

$$\text{Err}(\mathcal{S}) = |\hat{P}(\mathcal{S}) - P_{ref}(\mathcal{S})| \quad (4.3)$$

où $P_{ref}(\mathcal{S})$ est la probabilité de référence de la solution $\mathcal{S}$.

Si un ensemble de solutions $\mathbb{S}$ est considéré, afin d'avoir un point de vue plus général sur la qualité des estimations sur chacune des solutions, nous considérons l'erreur relative globale suivante :

$$\text{Err}(\mathbb{S}) = \sum_{\mathcal{S} \in \mathbb{S}} \left| \frac{\hat{P}(\mathcal{S}) - P_{ref}(\mathcal{S})}{P_{ref}(\mathcal{S})} \right| \quad (4.4)$$

Exemple 4.1 Considérons à nouveau l'exemple 1.1 (système proies prédateurs) avec les probabilités de référence suivantes :

$$P_{ref}(\mathcal{S}_1) = 0.005; P_{ref}(\mathcal{S}_2) = 0.185; P_{ref}(\mathcal{S}_3) = 0.81$$

Supposons que l'exécution d'un lot de 5 répliques avec MC nous donne les résultats suivants :

$$\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3$$

Nous pouvons calculer les mesures de détection suivantes :

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}_1) = 0, \mathcal{B}(\mathcal{S}_2) = 1, \mathcal{B}(\mathcal{S}_3) = 1, \mathcal{B}(\mathbb{S}) = 0$$

Les estimations de la probabilité de ces trois solutions données par MLE sont donc :

$$\hat{P}(\mathcal{S}_1) = 0, \hat{P}(\mathcal{S}_2) = 0.2, \hat{P}(\mathcal{S}_3) = 0.8$$

d'où les erreurs suivantes :

$$Err(\mathcal{S}_1) = 0.005, Err(\mathcal{S}_2) = 0.015, Err(\mathcal{S}_3) = 0.01, Err(\mathbb{S}) = 1.206$$

4.2.2 Comparaison de deux politiques d'exécution

Nous souhaitons comparer deux politiques d'exécution différentes (*e.g.* SPSC et MC). Nous exécutons donc, pour chaque politique, plusieurs lots de N répliques. Puis nous évaluons les valeurs moyennes des mesures obtenues sur ces lots par politique, ces valeurs étant notées $\overline{\mathcal{B}_{politique}}$ et $\overline{Err_{politique}}$ afin de représenter le taux de détection et le niveau de précision obtenus par la politique d'exécution utilisée. Ainsi, la comparaison est donnée sous forme de gain relatif de ces valeurs :

Gain relatif du taux de détection L'un des objectifs de SPSC est de favoriser l'obtention des différentes solutions. Ainsi, nous considérons le gain relatif du taux de détection :

$$\mathcal{G}_{\text{Détection}} = \frac{\overline{\mathcal{B}_{SPSC}} - \overline{\mathcal{B}_{MC}}}{\overline{\mathcal{B}_{MC}}} \times 100 \quad (4.5)$$

Gain relatif de la précision d'estimation Nous considérons le gain relatif de la précision d'estimation calculé à partir des erreurs d'estimation des deux politiques :

$$\mathcal{G}_{\text{Précision}} = \frac{(\overline{Err_{MC}} - \overline{Err_{SPSC}})}{\overline{Err_{MC}}} \times 100 \quad (4.6)$$

Gain relatif de la précision d'estimation sans échec Nous avons vu dans la section 1.4.3 qu'une faible probabilité de référence peut biaiser la comparaison de deux méthodes en faveur de celle ayant le taux de détection le plus faible.

Nous considérons donc le gain de précision $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$ obtenu dans le cas où les différentes solutions sont bien détectées :

$$\mathcal{G}'_{\text{Précision}} = \frac{(\overline{Err}_{MC}' - \overline{Err}_{SPSC}')}{\overline{Err}_{MC}'} \times 100 \quad (4.7)$$

où $\overline{Err}'$ représente la moyenne des Err issues des lots de réplifications vérifiant $\mathcal{B}(\mathbb{S}) = 1$.

4.3 Proies prédateurs

4.3.1 Présentation du modèle

Nous considérons tout d'abord un exemple classique en simulation multi-agents : le modèle proies-prédateurs. Il s'agit un modèle constitué d'agents « prédateurs » chassant des agents « proies », eux-même se nourrissant de la végétation disponible dans l'environnement. Les comportements des différents agents et la dynamique de l'environnement sont décrits dans la section suivante.

4.3.1.1 Comportements des agents

Conformément au modèle influences/réaction, les comportements des agents sont définis à *deux niveaux* dans le modèle : à chaque pas de temps, ils interagissent localement (*niveau micro*) en se déplaçant dans l'environnement puis la fonction de réaction (*niveau macro*) gère l'évolution globale du système (mortalité, reproduction, croissance de la végétation, etc.).

L'environnement est discrétisé en cases carrées (1×1) dans lesquelles une certaine quantité de végétation est présente. Les agents ne peuvent interagir localement que s'ils sont situés dans une même case. La fonction de réaction agit de manière indifférente sur tous les agents et la végétation présents dans le système.

Les différents comportements sont les suivants :

1. Comportement des agents proies :

- Alimentation : Un agent proie peut se nourrir de la végétation présente dans la case où il se trouve lorsque la quantité disponible est supérieure à 1. L'agent gagne alors une quantité d'énergie E_c^{proie} (l'énergie de l'agent ne dépassera pas sa valeur maximale $E_{\max}^{\text{proie}}$). La quantité de végétation dans cette case est décrétementée de 1.

2. Comportement des agents prédateurs :

- Alimentation : Un agent prédateur a une probabilité p_{chasse} de chasser un agent proie situé dans la même case que lui lorsque son énergie n'est pas maximale (strictement inférieure à $E_{\max}^{\text{prédateur}}$). L'agent gagne donc une quantité d'énergie $E_c^{\text{prédateur}}$ (l'énergie de l'agent ne dépassera pas sa valeur maximale $E_{\max}^{\text{prédateur}}$). L'agent proie chassé est donc retiré du système.

3. Environnement :

- Croissance de la végétation : La quantité de végétation (q_v) par case croît à chaque pas de temps avec un taux :

$$q_v(t+1) = q_v(t) + \tau^v \left(1 - \frac{q_v(t)}{q_{\max}}\right)$$

4. Comportement général de tous les agents (global) :

- Déplacement : À chaque pas de temps, tous les agents se déplacent selon une marche aléatoire 2D (chance équiprobable de se déplacer ± 1 pour la direction x et ± 1 pour la direction y)
- Vieillessement : À chaque pas de temps, l'âge de tous les agents est incrémenté de 1 et l'énergie de tous les agents est décrétementée de 1.
- Décès : À chaque pas de temps, les agents ayant une énergie de 0 ou ayant dépassé leur durée maximum de vie sont retirés du système.
- Reproduction : Le nombre de nouveaux agents nés par pas de temps est déterminé par la partie entière du taux de natalité multiplié par le nombre d'agents de même catégorie existant dans le système. Les nouveaux nés sont placés aléatoirement de façon équiprobable dans l'environnement.

4.3.2 Solutions

Nous disposons de connaissances minimales sur les régimes stationnaires possibles (figure 4.1) pour un tel modèle :

$\mathcal{S}_1$: il reste 1 espèce, la végétation, extinction des proies et des prédateurs.

$\mathcal{S}_2$: il reste 2 espèces, des proies et de la végétation, extinction des prédateurs.

$\mathcal{S}_3$: les 3 espèces cohabitent, l'évolution des populations étant quasi périodique.

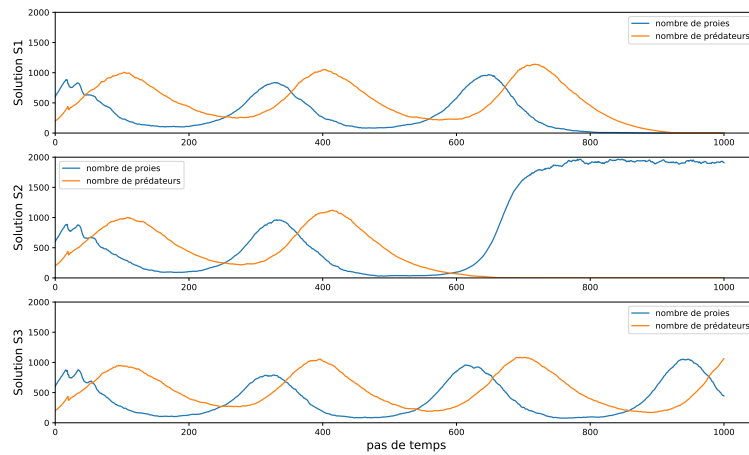


FIGURE 4.1 – Dynamique de population au cours du temps pour les différentes solutions.

Un problème souvent posé par les écologues est d'estimer les probabilités d'apparition de ces différents régimes stationnaires pour un paramétrage et des conditions initiales donnés. Pour résoudre ce problème, la méthode MC, mentionnée dans la section 1.3, est généralement appliquée. La figure 4.2 illustre les résultats de 500 réplifications au pas de temps final ($t_f = 1000$) pour un paramétrage donné. Nous remarquons ici que seules les solutions $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_2$ sont détectées avec cette approche, la solution $\mathcal{S}_1$ est en revanche ignorée alors qu'elle a une probabilité d'apparition non nulle et que cela peut mener à des conclusions intéressantes.

TABLEAU 4.1 – Conditions initiales du modèle utilisé pour les expériences.

description	valeur
nombre initial de prédateurs	200
nombre initial de proies	600
quantité initiale de végétation par case	1
énergie initiale des prédateurs	20
énergie initiale des proies	15

TABLEAU 4.2 – Paramétrage du modèle utilisé pour les expériences.

symbole	description	valeur
	taille de l'environnement	50×50
q_{max}	quantité maximale de végétation par case	2
E_{max}^{proie}	énergie maximale des proies	15
$E_{max}^{prédateur}$	énergie maximale des prédateurs	20
$\tau_r^{prédateur}$	taux de reproduction des prédateurs	0.044
τ_r^{proie}	taux de reproduction des proies	0.042
τ^v	taux de croissance de la végétation	0.07
E_c^{proie}	énergie obtenue par des proies après avoir consommé de la végétation	2
$E_c^{prédateur}$	énergie obtenue par des prédateurs après avoir consommé des proies	4
d_{proie}	durée de vie des proies (pas de temps)	100
$d_{prédateur}$	durée de vie des prédateur (pas de temps)	150
p_{chasse}	probabilité qu'un prédateur tue une proie	0.2

4.3.3 Expériences

4.3.3.1 Paramétrage et conditions initiales

Au début d'une simulation, les agents sont positionnés aléatoirement dans l'environnement et les conditions initiales appliquées sont présentées dans le tableau 4.1.

La durée de simulation est fixée à 1000 pas de temps. Nous souhaitons donc observer les différentes solutions à cet instant puis estimer la probabilité de chaque solution à partir de paramètres listés dans le tableau 4.2.

4.3.3.2 Résultats par MC (référence)

Avant de commencer les expériences avec l'approche proposée, nous avons besoin de connaître la vérité (référence) pour ce modèle. Nous avons donc effectué 750000 réplifications avec la méthode MC pour estimer la probabilité de ces trois

solutions :

$$\begin{aligned}
 P_{ref}(\mathcal{S}_1) &\approx 0.0065 \\
 P_{ref}(\mathcal{S}_2) &\approx 0.0126 \\
 P_{ref}(\mathcal{S}_3) &\approx 0.981
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

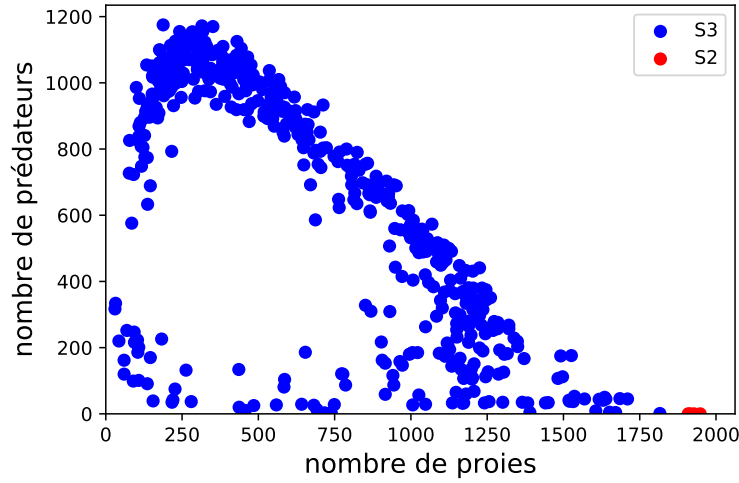


FIGURE 4.2 – Résultats issus de 500 réplifications avec la méthode MC. Chaque point représente l'état d'une réplification au pas de temps 1000.

4.3.3.3 Configuration de la politique SPSC

La politique d'exécution SPSC est déterminée par 3 paramètres :

1. Obtention des observables : les observables sont obtenus à partir des données macroscopiques des réplifications :

- (a) nombre d'agents proies
- (b) nombre d'agents prédateurs

2. Partitionnement :

Différentes méthodes de partitionnement sont considérées :

- (a) K-means
- (b) K-médoïdes

- (c) DBSCAN
- (d) agglomérative
- (e) ts-kmeans

3. Nombre de découpages temporels : Nous découpons l’horizon de simulation en m morceaux en considérant 4 valeurs possibles : $m = 1, 2, 3$ et 4 correspondant à une période de 500, 334, 250 et 200 pas de temps.

4.3.3.4 Comparaison des résultats obtenus par SPSC et MC

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus pour différentes configurations de SPSC et la méthode classique MC. Pour chaque configuration, 1000 lots de réplifications sont exécutés puis comparés selon les mesures mentionnées précédemment (section 4.2.2). Les tableaux A.1, A.2 et A.3 (mis en annexe pour ne pas altérer la lisibilité du document) présentent le taux de détection ($\bar{\mathcal{B}}$) et les erreurs d’estimation pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ obtenues pour les différentes configurations de SPSC testées. La figure 4.3 résume ces tableaux en représentant les trois gains relatifs associés aux solutions générales $\mathbb{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3\}$ sous la forme de heat maps pour $N = 50$.

4.3.4 Robustesse de l’approche SPSC

Nous considérons le même modèle en variant légèrement le taux de reproduction des prédateurs $\tau_r^{\text{prédateur}}$ du jeu de paramètres afin de vérifier la robustesse de l’approche SPSC. L’objectif de cette section est de tester la performance de SPSC face à des solutions avec différentes probabilités de référence. Les configurations de l’approche SPSC sont fixées avec $N = 50$ et K varie entre 5 et 15. Afin d’obtenir une approximation de la vérité sur différentes solutions, nous avons effectué 750000 réplifications avec la méthode MC pour estimer la probabilité de référence des différentes solutions possibles (tableau 4.3).

Chaque jeu de paramètres est exécuté avec 1000 lots de 50 réplifications pour une politique donnée. Les résultats de comparaison obtenus avec les jeux de paramètres 1 et 2 sont respectivement représentés dans les figures 4.4 et 4.5. Étant donné que très peu de configurations de SPSC ont réussi à détecter $\mathcal{S}_1$ (et parmi ces

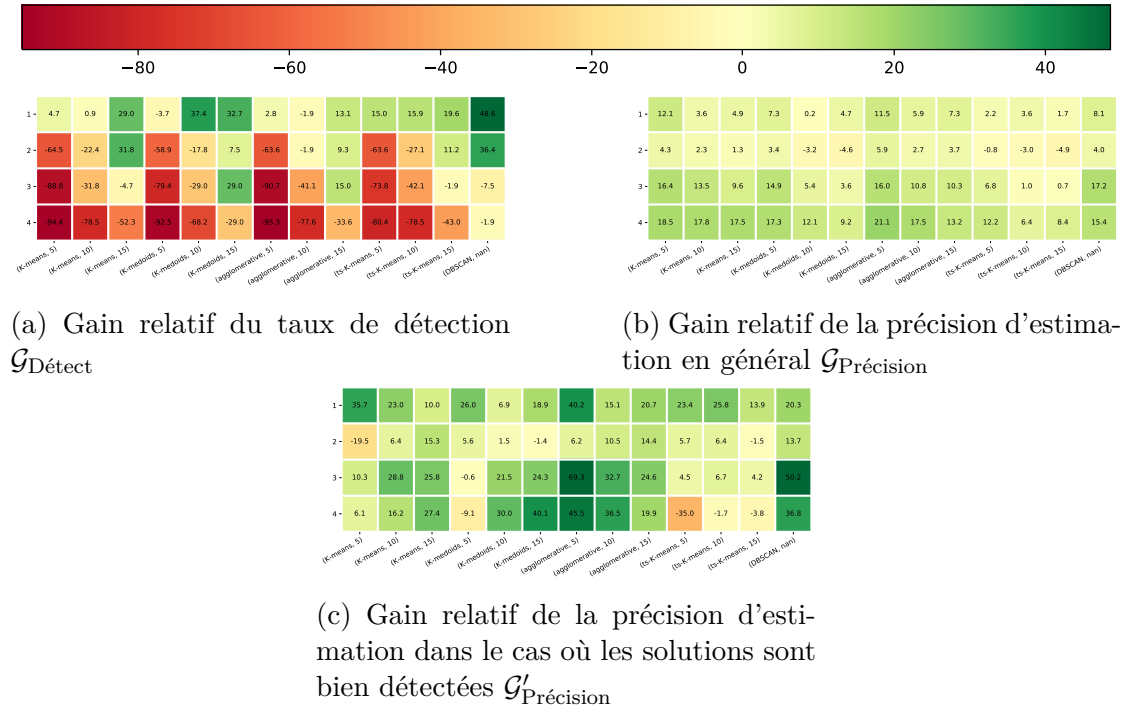


FIGURE 4.3 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détection}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres de base. Pour chaque sous-figure, l'ordonnée indique le nombre de découpages m et l'abscisse représente le couple composé de la méthode de partitionnement utilisée et la valeur de K .

TABLEAU 4.3 – Liste des jeux de paramètres ainsi que les probabilités de référence des différentes solutions.

Jeu de paramètres	$\tau_r^{\text{prédateur}}$	$P_{\text{ref}}(\mathcal{S}_1)$	$P_{\text{ref}}(\mathcal{S}_2)$	$P_{\text{ref}}(\mathcal{S}_3)$
1	0.0465	0.994136	0.000536	0.0038
2	0.045	0.236804	0.03474	0.619008
3	0.043	0.000004	0.000104	0.999892

configurations, le taux de détection est très faible) pour le jeu de paramètres 3, qui a une très faible probabilité de référence pour la solution $\mathcal{S}_1$, nous comparons les gains relatifs associé à la solution $\mathcal{S}_2$ dans la figure 4.6.

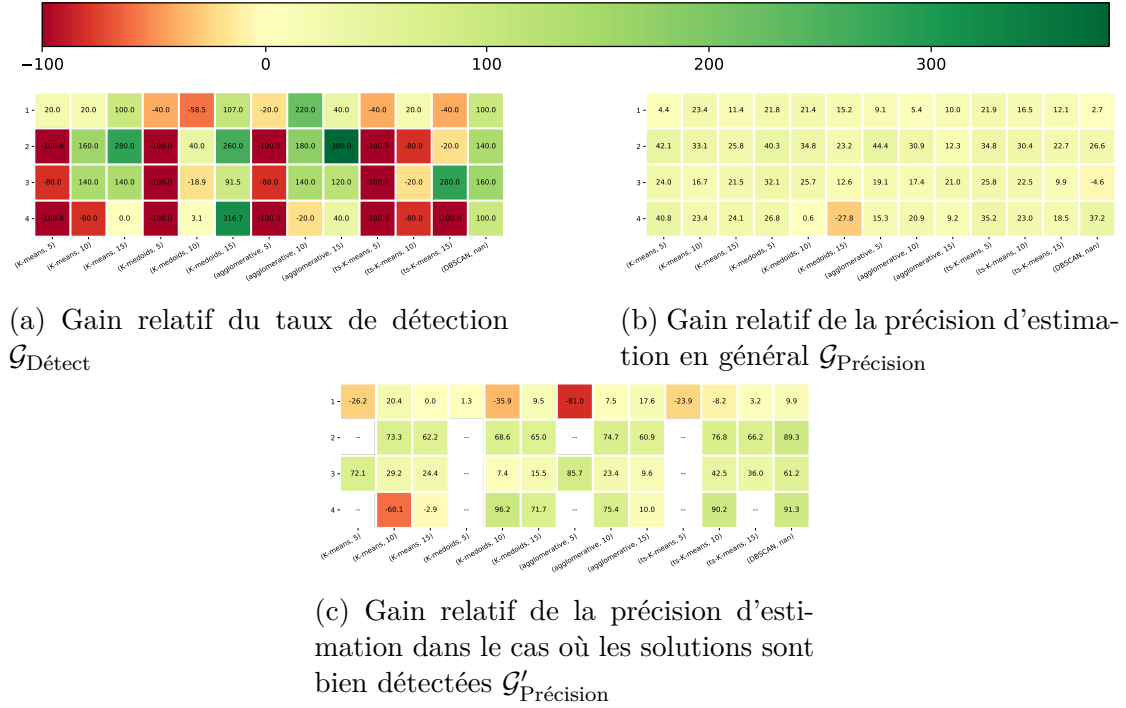


FIGURE 4.4 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détection}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres n° 1.

4.3.5 Discussion

Considérons dans un premier temps les résultats issus du jeu de paramètres de base (tableaux A.1, A.2 et A.3). Nous pouvons observer que dans la plupart du temps, la méthode SPSC donne une meilleure erreur relative que MC. Cependant l'écart type est en général plus grand. Nous pouvons en déduire que plus le nombre de réplifications N est petit, plus SPSC est performante (95% des configurations présentent une amélioration par rapport à MC pour $N = 30$.) Nous pouvons également observer que plus on découpe la simulation, moins nous arrivons à détecter les différentes solutions. Enfin, plus K est grand, plus le taux de détection obtenu par SPSC sera important. En effet, s'il existe quelques points intéressants mais

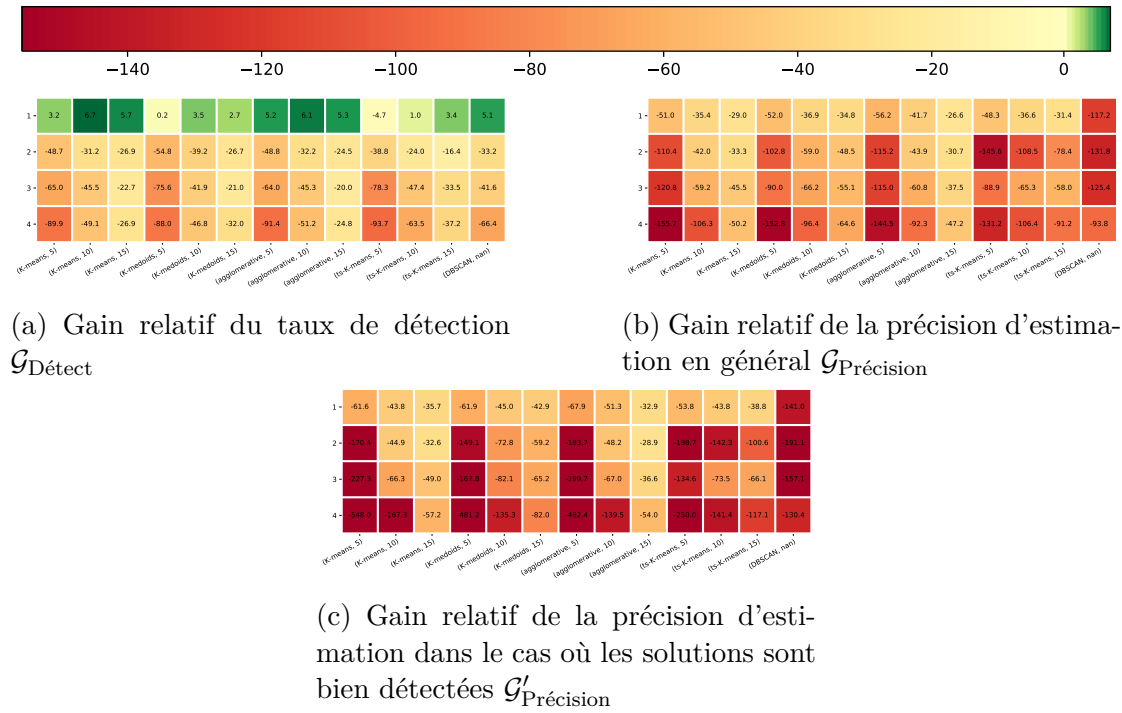


FIGURE 4.5 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{DéTECT}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres n° 2.

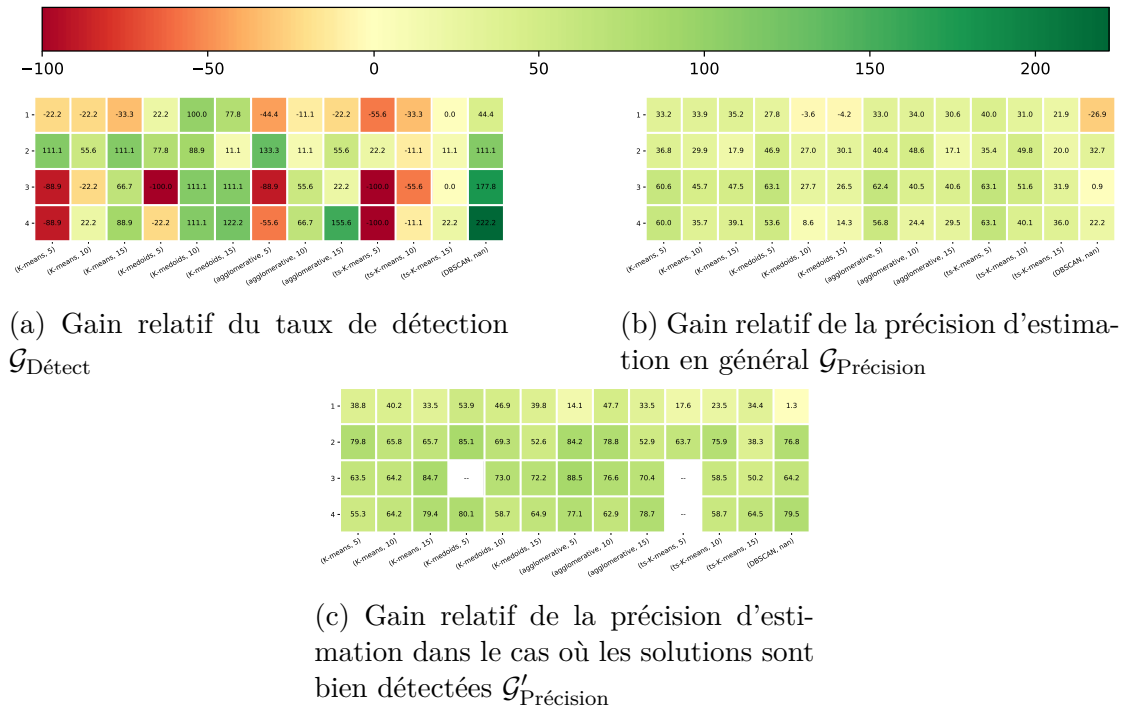


FIGURE 4.6 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{DéTECT}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de proies prédateurs avec le jeu de paramètres n° 3.

proche d'un grand cluster lors d'une étape de partitionnement, une faible valeur de K utilisée peut éventuellement assigner ces points intéressants à ce grand cluster alors que l'utilisation d'une grande valeur de K pourrait réussir à assigner ces points intéressants en un petit cluster distinct. Ce phénomène devient d'autant plus visible que l'une des solutions est extrêmement rare (figure 4.4a et 4.6a). En revanche, si K est suffisamment grand, SPSC semble robuste à la méthode de partitionnement utilisée. Notons néanmoins que DBSCAN permet d'obtenir en général les meilleurs résultats. En effet, il permet de détecter automatiquement les outliers et de les associer à des clusters distincts. Ainsi, ceux-ci ne sont pas ignorés lors du processus de sélection et conservés pour la suite de la simulation.

D'après la figure 4.3b, nous pouvons remarquer que la précision d'estimation de SPSC est en général meilleure que celle de MC (gain relatif $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ positif). La figure 4.3c nous montre que la précision d'estimation de SPSC, dans le cas où les différentes solutions sont bien détectées, est généralement meilleure que celle de MC. Les mêmes conclusions peuvent être tirées des résultats obtenus pour les jeux de paramètres 1 et 3 (qui ont chacun une solution rare).

Cependant, nous pouvons conclure qu'avec le jeu de paramètres 2, pour lequel les trois solutions considérées sont toutes fréquentes, la politique SPSC n'est pas adéquate (mauvaise précision et détection).

4.4 Virus

4.4.1 Présentation du modèle

4.4.1.1 Modèle épidémiologique

Nous considérons ici un modèle épidémiologique permettant de prédire l'évolution d'épidémies de maladies infectieuses comme les virus. Plus précisément, nous avons implémenté une version multi-agents du modèle SIR (Susceptible, Infectious, or Recovered) [37], similaire au modèle virus distribué avec la plateforme Netlogo [86]. Dans ce modèle, les agents se déplacent librement dans l'environnement suivant une marche aléatoire et peuvent être dans 3 états possibles (figure 4.7) :

- S** l'agent est susceptible d'être infecté par les agents proches,
- I** l'agent est infecté et peut à son tour contaminer les agents proches,
- R** l'agent est guéri et immunisé (partiellement ou totalement).

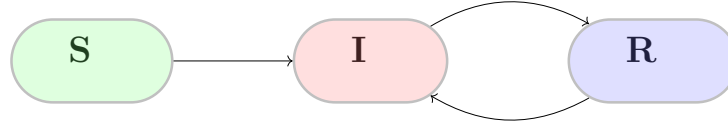


FIGURE 4.7 – Présentation schématique du modèle SIR.

4.4.1.2 Dynamique de population

Le modèle démographique utilisé ici est extrêmement simple, les agents ayant une durée de vie t_ℓ et un taux de natalité τ_r fixes.

4.4.1.3 Comportements des agents

Comme dans l'exemple précédent, les comportements des agents sont définis à *deux niveaux* dans le modèle : à chaque pas de temps, ils interagissent localement (*niveau micro*) en se déplaçant dans l'environnement puis la fonction de réaction (*niveau macro*) gère l'évolution globale du système (mortalité, reproduction, etc.).

L'environnement est discrétisé en cases carrées (1×1). Les agents ne peuvent interagir localement (s'infecter) que s'ils sont situés dans une même case.

Déplacement :

A chaque pas de temps tous les agents se déplacent selon une marche aléatoire 2D (± 1 en x et y).

Vieillessement :

A chaque pas de temps l'âge de tous les agents est incrémenté de 1.

Infection :

La probabilité d'infection d'un nouvel agent dans l'état S situé sur une case comportant n agents malades I est déterminée par

$$p = 1 - (1 - p_{inf})^n.$$

Guérison :

Un agent malade I est guéri lorsqu'il a dépassé la durée de l'infection. L'agent guéri passe dans l'état R et gagne une immunité qui affaiblit la probabilité d'une ré-infection.

Ré-infection :

La probabilité de ré-infection d'un agent dans l'état R situé sur une case comportant n agents malades I est déterminée par

$$p = (1 - d_{immu})(1 - (1 - p_{inf})^n).$$

Naissance :

Le nombre de nouveaux agents nés par pas de temps est déterminé par la partie entière du taux de natalité multiplié par le nombre d'agents n'étant pas malades (états S et R)

Décès :

A chaque pas de temps, les agents âgés de plus que leur durée de vie sont retirés du système. Par ailleurs, les agents malades I ont une chance de décès avec la probabilité

$$p = \frac{p_d}{t_{inf}}$$

La liste et les valeurs des paramètres utilisés dans nos expériences sont données dans le tableau 4.5 et les conditions initiales dans le tableau 4.4.

TABLEAU 4.4 – Conditions initiales utilisés dans le modèle virus.

description	valeur
Taux d'infection initial	0.3
Nombre initial d'agents	600

4.4.2 Solutions

Nous disposons de connaissances minimales sur les régimes stationnaires possibles pour un tel modèle :

$\mathcal{S}_1$ le virus disparaît totalement de l'environnement,

TABLEAU 4.5 – Paramètres utilisés dans le modèle virus.

symbole	description	valeur
p_{inf}	Probabilité d'infection d'un agent S par un agent I	0.05
t_ℓ	Durée de vie d'un agent non infecté (pas de temps)	150
τ_r	Taux de natalité (par pas de temps)	0.01
p_d	Probabilité de décéder suite à l'infection	0.05
d_{immu}	Immunité d'un agent R	0.2
t_{inf}	Durée de l'infection (pas de temps)	20
	Taille de l'environnement	20×20

$\mathcal{S}_2$ le virus persiste dans l'environnement.

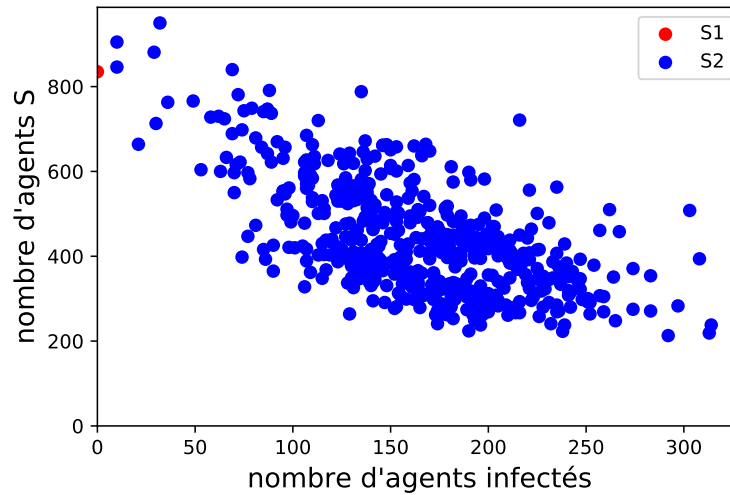


FIGURE 4.8 – Résultats issus de 500 réplifications avec la méthode MC. Chaque point représente l'état d'une réplification au pas de temps 250.

4.4.3 Expériences

4.4.3.1 Paramétrage et conditions initiales

Au début d'une simulation, les agents sont positionnés aléatoirement dans l'environnement et les conditions initiales appliquées sont présentées dans le tableau 4.4.

La durée de simulation est fixée à 250 pas de temps. Nous souhaitons donc observer les différentes solutions à cet instant puis estimer la probabilité de chaque solution pour le paramétrage défini dans le tableau 4.5.

4.4.3.2 Résultats par MC

Avant de commencer les expériences avec l'approche proposée, nous avons besoin de connaître la vérité (référence) pour ce modèle. Nous avons donc effectué 250000 répliques avec la méthode MC pour estimer la probabilité de ces trois solutions :

$$\begin{aligned} P_{ref}(\mathcal{S}_1) &\approx 0.002644 \\ P_{ref}(\mathcal{S}_2) &\approx 0.997356 \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.4.3.3 Liste des configurations de la politique SPSC

La politique d'exécution SPSC est déterminée par 3 paramètres :

1. Obtention des observables : les observables sont obtenus sur les données macroscopiques des répliques :
 - (a) nombre d'agents infectés
 - (b) nombre d'agents sains (non infectés)
2. Partitionnement :
 - (a) K-means
 - (b) K-médoïdes
 - (c) DBSCAN
 - (d) agglomérative
3. Nombre de découpages temporels : Nous découpons l'horizon de simulation en m morceaux en considérant 4 valeurs possibles : $m = 1, 2, 3$ et 4 correspondant à une période de 125, 83, 63 et 50 pas de temps.

4.4.3.4 Comparaison des résultats obtenus par SPSC et MC

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus pour différentes configurations de SPSC et la méthode classique MC. Pour chaque configuration, 1000 lots de réplifications sont exécutés puis comparés selon les mesures mentionnées précédemment (section 4.2.2). Les tableaux B.1, B.2 et B.3 (mis en annexe pour ne pas altérer la lisibilité du document) présentent le taux de détection ($\bar{\mathcal{B}}$) et les erreurs d'estimation pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ obtenues pour les différentes configurations de SPSC testées. La figure 4.9 résume les tableaux B.1, B.2 et B.3 en représentant les trois gains relatifs associés aux solutions générales $\mathbb{S}$ sous la forme de heat maps pour $N = 50$.

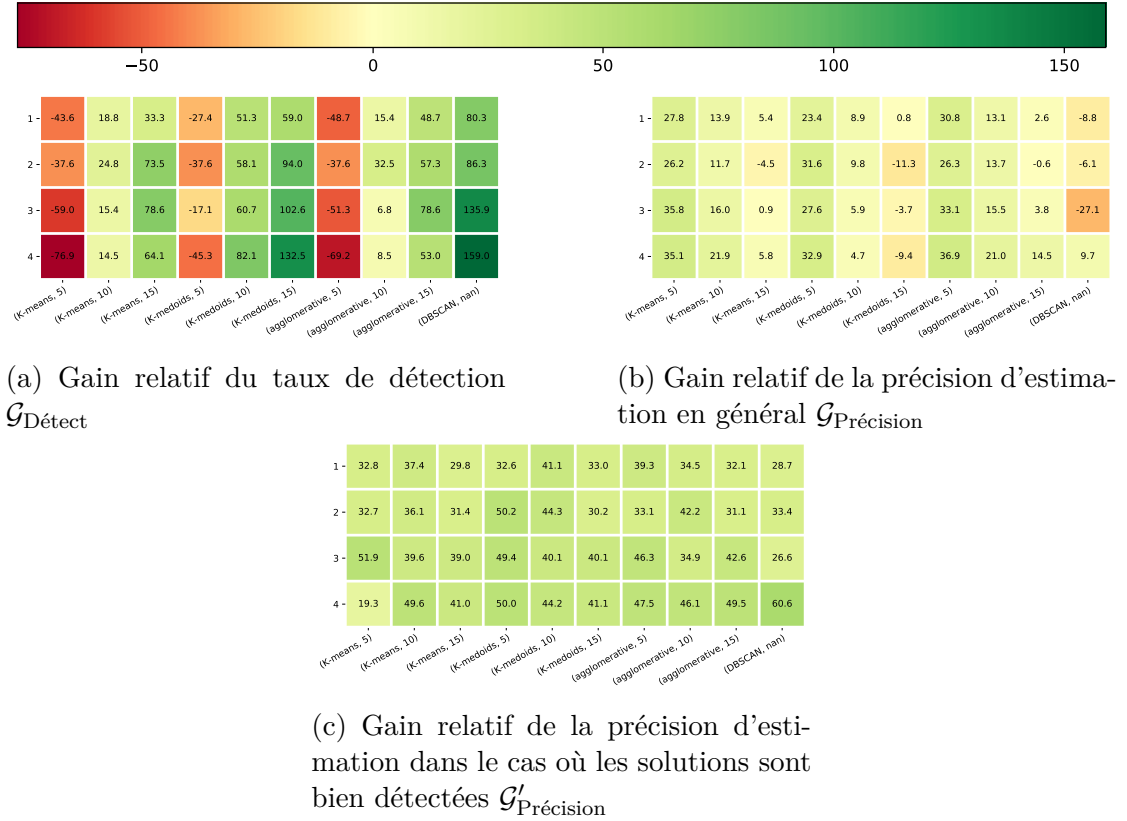


FIGURE 4.9 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détection}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres de base.

4.4.3.5 Robustesse de l'approche SPSC

Nous considérons le même modèle en variant légèrement la probabilité d'infection p_{inf} du jeu de paramètres afin de vérifier la robustesse de l'approche SPSC. L'objectif de cette section est de tester la performance de SPSC face à des solutions avec différentes probabilités de référence. Les configurations de l'approche SPSC sont fixées avec $N = 50$ et K varie entre 5 et 15. Afin d'obtenir une approximation de la vérité sur différentes solutions, nous avons effectué 250000 répliques avec la méthode MC pour estimer la probabilité des différentes solutions possibles (tableau 4.6).

TABLEAU 4.6 – Liste des jeux de paramètres ainsi que les probabilités de référence des différentes solutions.

Jeu de paramètres	p_{inf}	$P_{ref}(\mathcal{S}_1)$	$P_{ref}(\mathcal{S}_2)$
1	0.01	0.994552	0.005448
2	0.02	0.972584	0.027416
3	0.08	0.000964	0.999036

Chaque jeu de paramètres est exécuté avec 1000 lots de 50 répliques pour une politique donnée. Les répliques issues du jeu de paramètres 1 convergent vers $\mathcal{S}_1$ très rapidement, ce qui peut gêner l'usage de SPSC avec un faible nombre de découpages (lors de la première étape de partitionnement les répliques ont déjà toutes convergé sur $\mathcal{S}_1$). Nous rajoutons ainsi des valeurs supplémentaires pour le nombre de découpages dans l'expérience ($m = 9, 24$) pour ce jeu de paramètres et ses résultats sont représentés dans la figure 4.10. Les résultats de comparaison obtenus avec les jeux de paramètres 2 et 3 sont respectivement représentés dans les figure 4.11 et 4.12.

4.4.4 Discussion

Les résultats obtenus pour ce modèle sont similaires à ceux présentés dans la section précédente : pour la plupart des configurations, SPSC apporte une amélioration sur l'erreur relative par rapport à MC. Quant au taux de détection, la valeur de K joue un rôle important : plus K est grand, plus le taux de détection

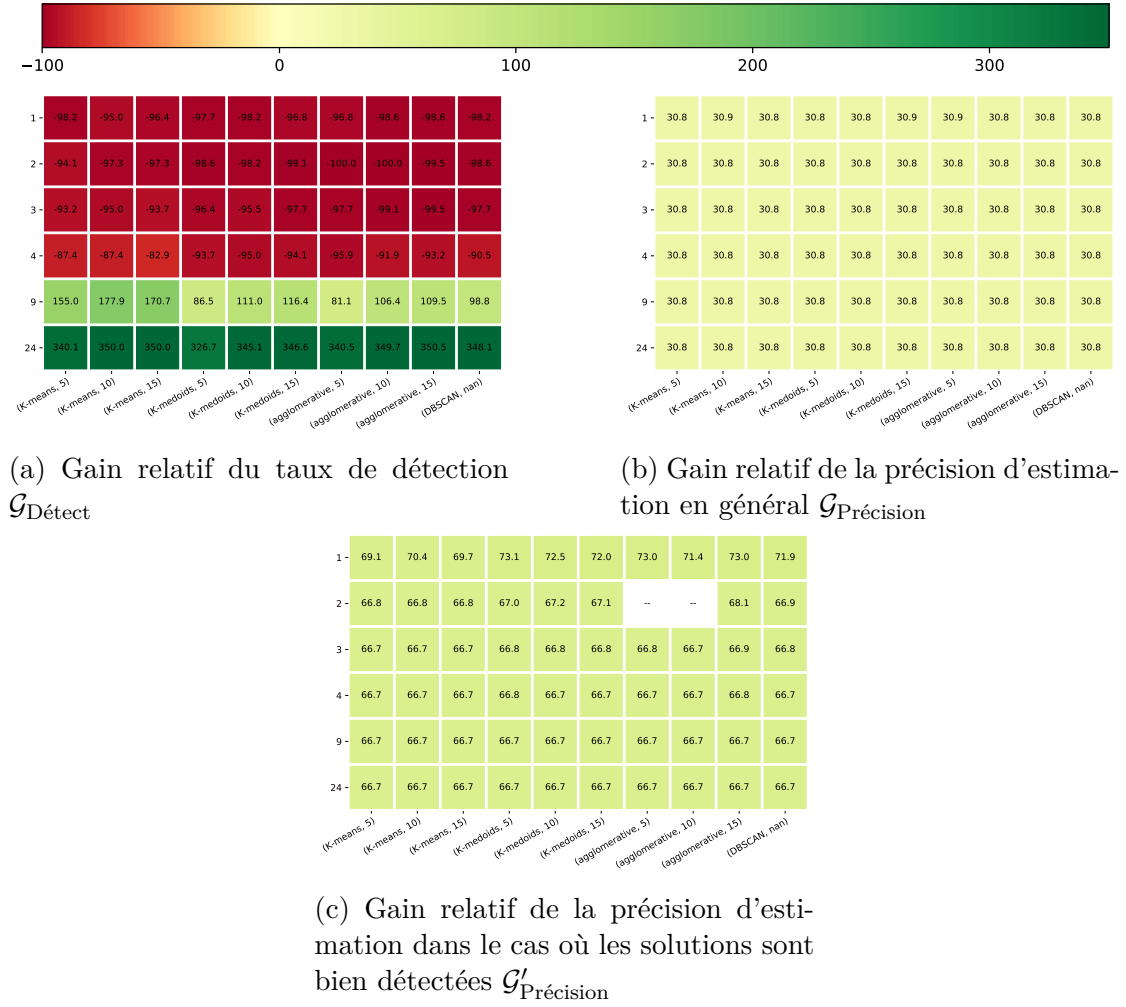


FIGURE 4.10 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détection}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres n° 1.

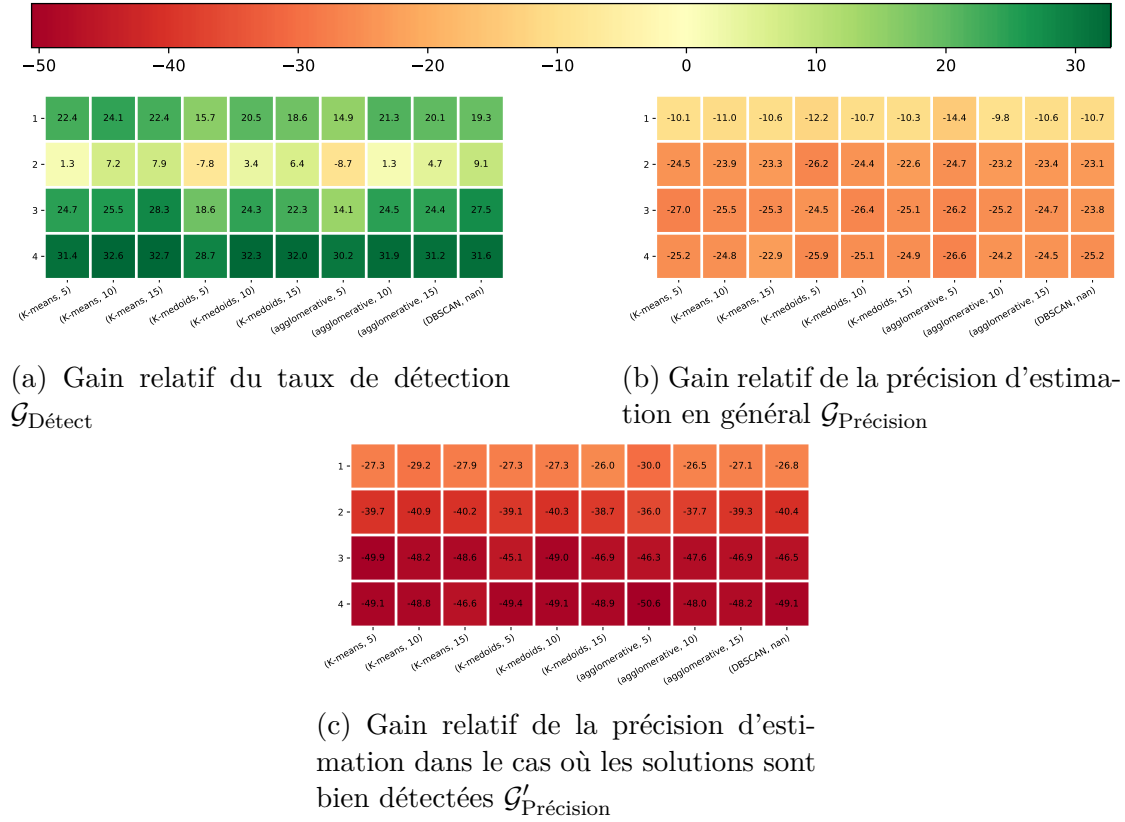


FIGURE 4.11 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{DéTECT}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres n° 2.

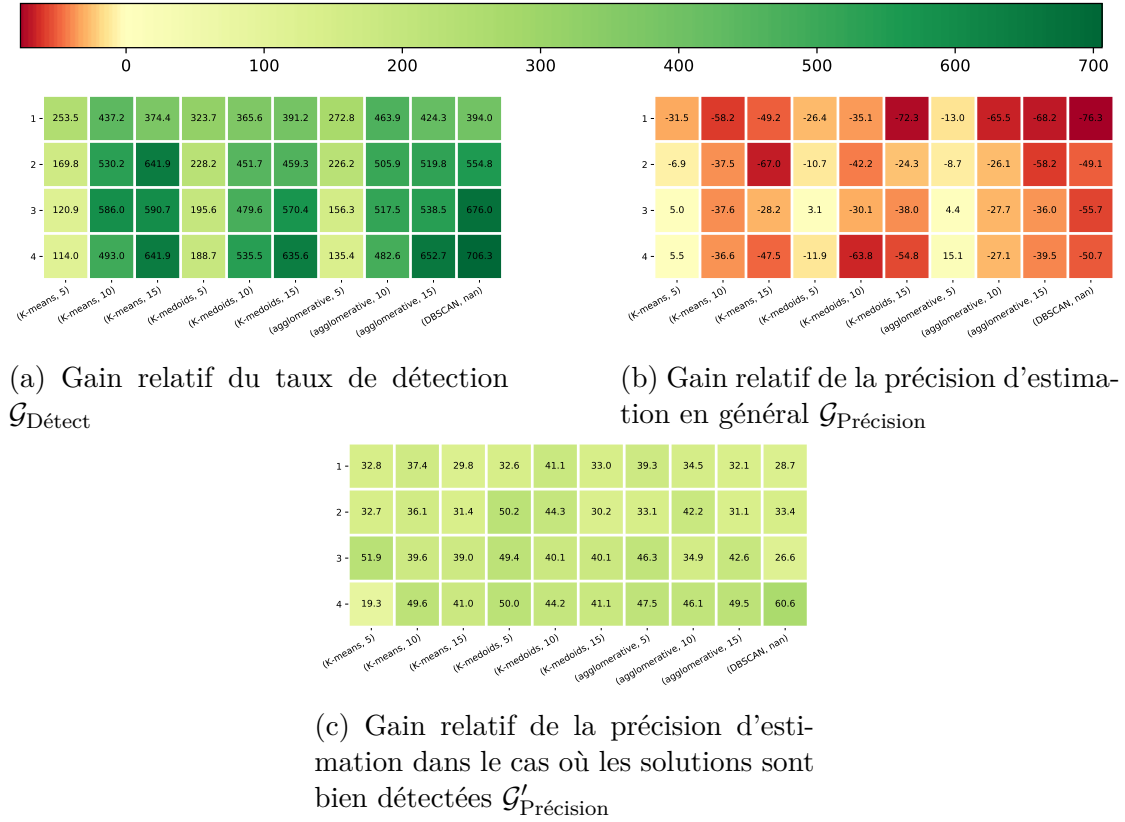


FIGURE 4.12 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détection}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de virus avec le jeu de paramètres n° 3.

obtenu par SPSC sera important (figure 4.9a). Inversement, lorsque la valeur de K est faible, un affaiblissement sur le taux de détection est observé. Cependant, l'erreur relative obtenue par SPSC reste inférieure à celle de MC dans ce cas (figure 4.9b). Le gain $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$ nous montre également que les solutions sont mieux estimées dans le cas où les différentes solutions sont bien détectées (figure 4.9c). Les résultats obtenus en considérant différents jeux de paramètres montrent aussi que SPSC est préférable dans le cas où les solutions sont rares (figures 4.10 et 4.12) et n'est pas adéquate dans le cas où les solutions sont fréquentes (figure 4.11).

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué les performances de la politique d'exécution SPSC sur deux modèles multi-agents académiques simples. Des métriques, permettant de mesurer la capacité d'une politique à détecter des solutions possibles et à estimer précisément leur probabilité d'apparition, ont été définies afin de quantifier le gain apporté par SPSC par rapport à la méthode classique MC.

Les résultats obtenus à l'issue de ces expérimentations suggèrent qu'une implémentation de SPSC bien paramétrée serait plus efficace que MC dans le cas où les solutions d'intérêt sont rares.

Dans le chapitre suivant, afin de conforter ces conclusions préliminaires, nous évaluerons les performances de SPSC sur un modèle multi-agents de transport routier plus sophistiqué. En effet, les comportements des agents y sont plus complexes, les observables de grande dimension, les solutions d'intérêt multiples et le temps de calcul relativement important.

Application : Transport

Sommaire du présent chapitre

5.1 Introduction	77
5.2 Présentation synthétique du modèle	78
5.2.1 Comportement des agents représentant des véhicules	78
5.2.2 Environnement	85
5.3 Expériences	85
5.3.1 Paramétrage et conditions initiales	86
5.3.2 Observables	87
5.3.3 Solutions envisagées	88
5.3.4 Résultats obtenus par MC (référence)	90
5.3.5 Configuration de la politique SPSC	90
5.3.6 Comparaison des résultats obtenus par SPSC et MC	91
5.3.7 Discussion	91
5.4 Conclusion	93

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons appliqué SPSC sur des modèles multi-agents académiques. Ici, nous l'évaluerons sur un modèle plus complexe et réaliste.

Nous entendons par là un modèle pouvant générer d'avantage de solutions différentes, comprenant plus d'agents aux comportements plus sophistiqués et induisant un nombre important d'observables.

Les données issues des répliques étant ainsi de grande dimension, elles seront pré-traitées à l'aide d'un auto-encodeur entraîné sur des données existantes. Cette approche prend son sens lorsque l'utilisateur réalise des simulations de façon intensive et que le coût de cette phase d'apprentissage est négligeable par rapport au coût de l'ensemble des simulations exécutées.

Un simulateur de transport urbain a ainsi été développé dans le cadre du projet ELSAT afin de fournir un outil d'aide à la décision destiné aux gestionnaires de réseaux de transport. Il permet par exemple d'optimiser la configuration d'une ligne de bus ou de tester l'impact d'un nouveau plan de circulation sur le trafic. Dans la suite de ce chapitre nous nous concentrerons sur l'estimation de l'état du trafic routier pour une configuration donnée.

Dans un premier temps, nous présenterons le modèle sur lequel repose le simulateur développé. Puis, nous proposerons des expériences permettant d'évaluer l'efficacité de SPSC dans ce cadre et les résultats de celles-ci. Nous considérerons pour ce faire une configuration assez simple (et donc plus facilement contrôlable) de ce modèle.

5.2 Présentation synthétique du modèle

Nous utilisons ici un modèle multi-agents permettant de simuler le déplacement de véhicules (représentés par des agents) dans un réseau routier, la dynamique exogène du réseau de transport, telle que l'arrivée de nouveaux véhicules venant de l'extérieur ou le départ de véhicules vers l'extérieur de la zone simulée étant quant à elle gérée par l'environnement de la simulation.

5.2.1 Comportement des agents représentant des véhicules

Un agent "*véhicule*" se déplace dans le réseau routier en suivant son plan, tout en respectant les règles de circulation. Il se base pour ce faire sur un plan de parcours (similaire aux instructions données par un assistant de navigation

GPS) composé :

- d'une coordonnée de départ dans le réseau (pouvant se situer au milieu d'une voie) ;
- d'une coordonnée d'arrivée dans le réseau (pouvant également se situer au milieu d'une voie) ;
- d'un ensemble d'étapes intermédiaires identifiant les arcs et noeuds devant être empruntés pour parvenir à l'arrivée. Un ensemble de voies utilisables est associé à chaque étape intermédiaire, afin d'être suffisamment souple pour permettre au véhicule de dépasser d'autres usagers sans risquer de rater une sortie (et ainsi de se "perdre" dans le réseau).

Nous décrivons ci-dessous le comportement de ces agents et en particulier les phases de perception et de décision.

Il est à noter que nous utilisons par la suite le terme "*obstacle*" pour décrire tout élément situé devant (ou derrière) un véhicule et pouvant entraver son déplacement. Cela peut donc autant être un objet statique qu'un autre véhicule.

Perception Pendant cette première phase, le véhicule construit une interprétation de sa situation actuelle, que l'on nomme situation relative. Elle prend la forme d'un triplet d'ensembles :

- L'association entre chaque trajectoire possible à partir de sa voie actuelle et l'obstacle se situant devant et derrière lui sur cette trajectoire ;
- L'association entre chaque trajectoire possible à partir de la voie à gauche de sa voie actuelle et l'obstacle se situant devant et derrière lui sur cette trajectoire ;
- L'association entre chaque trajectoire possible à partir de la voie à droite de sa voie actuelle et l'obstacle se situant devant et derrière lui sur cette trajectoire.

Pour construire cet ensemble, il :

1. identifie les obstacles et véhicules présents devant lui et derrière lui, à la fois sur sa propre voie ainsi que sur les voies sur sa gauche et sur sa droite. Il obtient alors une première représentation de sa situation relative.

2. applique alors les restrictions liées à la signalisation routière et à son plan de navigation à chaque trajectoire identifiée dans la situation relative :

- Si une voie est interdite au véhicule (*e.g.* voies réservées), elle est marquée comme inaccessible dans la situation relative ;
- Si le changement de voie est interdit au véhicule (*e.g.* ligne continue), elle est également marquée comme inaccessible dans la situation relative ;
- Si une voie ne fait pas partie du plan de navigation, elle est marquée comme inaccessible dans la situation relative.

Pour éviter tout accident, la trajectoire courante est toujours marquée comme accessible, même si cette dernière passe par une voie en dehors du plan de navigation, pour que le véhicule puisse prendre en compte la situation où il lui est impossible de changer de trajectoire ;

3. Interprète le contenu de chaque trajectoire accessible, afin de respecter différentes règles de circulation. Cela peut l'amener à modifier la situation relative initialement perçue :

- Afin de respecter les règles de circulation dans un carrefour, le véhicule va percevoir dans certaines situations un obstacle à l'entrée de l'intersection présente dans la trajectoire étudiée :
 - * Si une trajectoire actuellement occupée par un obstacle dans l'intersection intersecte la trajectoire du véhicule (*i.e.* il ne souhaite pas couper la trajectoire des autres véhicule) ;
 - * Si une des trajectoires prioritaires à la trajectoire du véhicule va bientôt accueillir un obstacle prioritaire. Pour cela, lorsque le véhicule est suffisamment proche de l'intersection¹, il tente d'identifier s'il risque de couper la trajectoire d'un obstacle provenant d'une voie prioritaire. Afin de simplifier les calculs, nous considérons qu'un véhicule ne risque pas de couper la trajectoire d'un obstacle si toutes les voies prioritaires à la trajectoire du véhicule ne

1. Si le véhicule atteint l'intersection dans un temps inférieur à un seuil ou s'il se situe à une distance en mètres inférieure à un seuil. La distance en mètres est nécessaire afin de gérer les cas où la vitesse du véhicule est très faible (s'il était à l'arrêt à l'intersection). En effet, le seuil en temps n'est presque jamais atteint dans de tels cas.

contiennent aucun obstacle vers l'arrière sur une distance au moins égale à un seuil² ;

- La priorité relative des voies oblige à ne pas dépasser par la droite. Pour cela, si un obstacle situé devant sur la voie gauche est suffisamment proche, le véhicule verra un clone de ce dernier devant lui sur sa propre voie. Cette règle a deux exceptions : 1) Si l'obstacle a une vitesse faible, le véhicule considère qu'il est dans un embouteillage et qu'il peut donc ignorer l'obstacle ; et 2) si l'obstacle situé dans la voie actuelle du véhicule représente un danger plus grand que l'obstacle sur la voie de gauche, il l'ignore l'obstacle de gauche moins dangereux. Pour simplifier les calculs, cette règle n'est respectée qu'avant une intersection : nous considérons qu'un changement de voie n'est possible après une intersection qu'après un certain délai. Par conséquent, cette règle ne s'applique qu'au cas où une seule trajectoire possible est détectée à gauche, et que cette dernière mène à un obstacle avant d'atteindre une intersection ;

Décision Dans cette seconde phase, le véhicule étudie la situation relative conjointement à son plan de navigation et la trajectoire qu'il suit actuellement afin de décider :

1. S'il va changer de voie ;
2. S'il va accélérer / décélérer.

Pour cela, il commence par identifier si sa trajectoire actuelle est satisfaisante :

1. Sa voie actuelle et la voie en aval doivent faire partie de son plan de navigation ;
2. Son accélération n'augmentera pas de manière significative en changeant de trajectoire, ou alors se rendre sur une telle trajectoire risque de causer des accidents. Ce test est réalisé en utilisant le modèle MOBIL (voir ci-après).

Si ce n'est pas le cas, il identifie parmi les trajectoires accessibles et non dangereuses celle qui est la plus intéressante à l'aide du modèle MOBIL.

Une fois la trajectoire identifiée, le véhicule :

2. Ce seuil est également mesuré avec un seuil en temps et un seuil en distance.

- Change de voie si la trajectoire débute sur une voie qui n'est pas sa voie actuelle ;
- Si la trajectoire diffère de la trajectoire actuelle du véhicule, elle devient sa trajectoire actuelle ;
- Calcule sa nouvelle accélération en fonction de l'obstacle situé devant lui dans sa nouvelle trajectoire, en utilisant le modèle IDM (voir ci-après).

MOBIL Le modèle MOBIL est un modèle général de changement de voie utilisé conjointement à un modèle de poursuite (*i.e.*, calculant l'accélération du véhicule) comme IDM [38]. Ce modèle permet d'identifier si un véhicule va initier un changement de voie vers la gauche ou la droite, en prenant en compte plusieurs critères :

- la *sécurité* : le déplacement ne peut avoir lieu que s'il ne risque pas de causer d'accident,
- l'*incitation* : le déplacement ne peut avoir lieu que s'il est suffisamment intéressant. Ce critère est lui-même la conjonction de plusieurs considérations :
 - * l'amélioration de la situation personnelle du véhicule,
 - * l'amélioration de la situation de l'ancien véhicule suiveur (sur la voie d'origine),
 - * la non-dégradation de la situation du nouveau véhicule suiveur (sur la voie de destination),
 - * le non dépassement par la droite, à moins d'être dans une situation congestionnée,
 - * l'usage de la voie de gauche uniquement pour le dépassement, à moins d'être dans une situation congestionnée.

Le critère de sécurité est éliminatoire : une trajectoire ne parvenant pas à le respecter n'est pas une candidate valable pour le changement de voie. Il consiste à prédire, à l'aide du modèle IDM, la décélération imposée au véhicule situé derrière sur la voie de destination si jamais le changement de voie avait eu lieu, et à comparer cette valeur à un seuil. Si la valeur est supérieure au seuil, le changement de voie n'est pas possible.

Le critère d'incitation permet d'évaluer l'attractivité d'une voie. Cette formule utilise pour cela la projection avec le modèle IDM de l'accélération du véhicule, du véhicule derrière sur la voie actuelle et le véhicule derrière sur la nouvelle voie dans les deux situations où le véhicule est soit présent, soit absent de la voie actuelle ou la voie de destination. Le changement de voie n'est envisagé que si cette évaluation dépasse un seuil, dont la valeur varie selon la voie considérée :

- Le seuil est plus élevé pour aller vers la gauche que vers la droite, afin de limiter l'utilisation de la voie de gauche ;
- Le seuil pour aller vers la droite peut être négatif, afin de tolérer le rabattement à droite même si cela occasionne de légers désagréments à la situation sur la voie de droite (soit pour le véhicule suiveur, soit pour le véhicule lui-même).

La décision consiste alors à déclencher un changement vers la voie pour laquelle le seuil est atteint, si elle existe. Si plusieurs voies l'atteignent, alors la voie ayant la meilleure note (*i.e.* évaluation moins seuil) est utilisée. En pratique, cette décision consiste donc à attribuer la note 0 à la voie actuelle, et à retenir la voie dont la note est la plus élevée.

Dans notre modèle, MOBIL peut être utilisé tel quel dans le cas où aucune intersection n'est détectée. Dans le cas contraire, il faut étendre l'évaluation à toutes les trajectoires possibles identifiées :

- Le principe général reste le même, mais l'évaluation porte non pas sur les voies, mais sur les trajectoires ;
- La comparaison des trajectoires repose sur des notes calculées de la même manière que pour les voies ;
- Si au moins deux trajectoires sont possibles à partir de la voie actuelle, on considère qu'une trajectoire est une alternative viable à partir du moment où elle offre un gain pour le véhicule (l'accélération du véhicule est la seule valeur pouvant changer entre ces trajectoires). Cela se traduit par un seuil égal à 0.

Calcul de l'accélération d'un véhicule avec le modèle IDM Pour identifier si un obstacle frontal est plus dangereux qu'un autre du point de vue d'un véhicule,

nous utilisons le modèle Intelligent Driver Model (IDM) [80].

IDM permet de calculer la nouvelle accélération du véhicule ($\frac{dv}{dt}$) en fonction de divers paramètres, incluant d'une part des spécificités propres au véhicule (distance de sécurité à respecter, puissance d'accélération et de décélération, *etc.*) et d'autre part sa situation actuelle (distance par rapport à l'obstacle situé devant, vitesse de l'obstacle) :

$$\frac{dv}{dt} = a \left(1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left(\frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right), \quad (5.1)$$

avec

$$s^*(v, \Delta v) = s_0 + vT + \frac{v \Delta v}{2\sqrt{ab}}, \quad (5.2)$$

où Δ_v représente la vitesse relative du véhicule par rapport à l'obstacle en m/s .

La signification des paramètres (v_0, T, a, b, δ et s_0) est donnée dans le tableau 5.1.

TABLEAU 5.1 – Paramètres utilisés par le modèle d'IDM.

symbole	signification	unité
v_0	vitesse désirée	m/s
T	temps de sécurité	s
a	accélération maximale	m/s^2
b	décélération maximale désirée	m/s^2
δ	exposant d'accélération	—
s_0	distance de sécurité	m

Pour mesurer la dangerosité relative de deux obstacles, le véhicule utilise le modèle IDM pour calculer sa future accélération dans les différents cas possibles (une par obstacle testé). L'obstacle le plus dangereux est celui imposant la plus grande décélération au véhicule.

5.2.2 Environnement

Le rôle de l'environnement dans la simulation est d'assurer les échanges entre la simulation et l'extérieur. Il gère ainsi

- l'apparition de véhicules venant de l'extérieur dans le réseau,
- le départ de véhicules situés dans le réseau vers l'extérieur.

Le second cas ne nécessitant pas de traitement particulier, seul le premier nécessite un modèle approprié. Ce comportement est implémenté en plaçant en divers endroits du réseau routier (usuellement au niveau des nœuds marquant le début ou la fin du réseau) des points de génération de véhicules.

Un point de génération est caractérisé par :

- un modèle de temporisation, identifiant quand générer un nouveau véhicule,
- un modèle de calcul de la vitesse initiale du véhicule en fonction de la situation du trafic en aval du point de génération,
- Un modèle de sécurité, s'assurant que le véhicule peut être inséré sans danger dans le réseau : le véhicule situé derrière le point de génération et le véhicule inséré ne doivent pas freiner trop brusquement ;
- Un modèle de génération de véhicules, permettant de créer le véhicule et tous les paramètres lui étant associés (son plan de route).

5.3 Expériences

Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, notre objectif premier est d'évaluer la politique SPSC dans un cadre contrôlé. Les expériences ont ainsi été réalisées avec une configuration du réseau simple de type grille comportant 3 routes horizontales et 7 verticales uniformes (100m de longueur pour chaque section). Chaque route est composée de deux voies de circulations à sens inverse, ce qui constitue au total 104 voies dans le réseau. La vitesse maximale est limitée à $\frac{50}{3.6}$ mètres par seconde dans tout le réseau. Ce réseau est représenté schématiquement dans la figure 5.1.

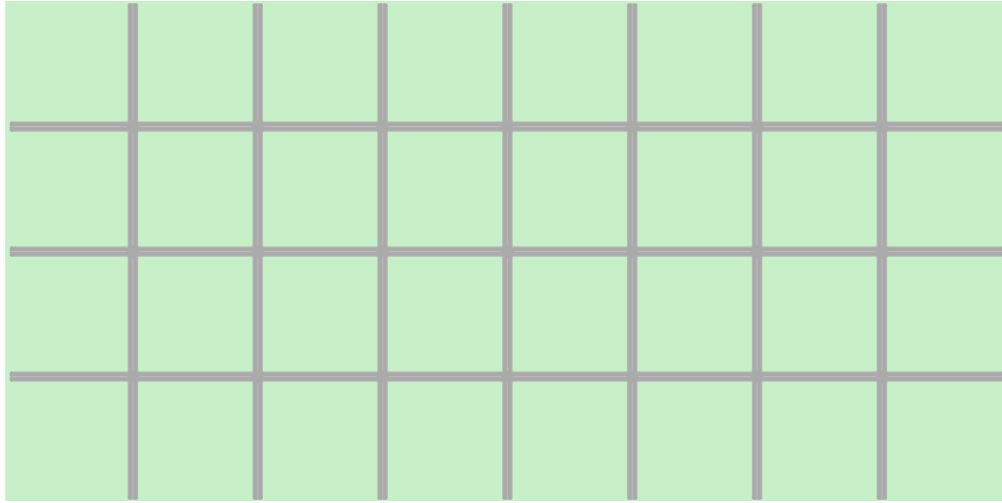


FIGURE 5.1 – Représentation du réseau routier utilisé pour les expériences.

TABLEAU 5.2 – Paramétrage du modèle d'IDM utilisé pour les expériences.

symbole	valeur
v_0	$\frac{50}{3.6} m/s$
T	$1.5s$
a	$1.5m/s^2$
b	$2m/s^2$
δ	4
s_0	$2m$

5.3.1 Paramétrage et conditions initiales

Nous nous intéressons aux situations qui peuvent se produire après 2 heures de trafic routier. Le pas de temps étant configuré à 0.1 seconde, le pas de temps final est ainsi 72000.

Les véhicules calculent leur accélération suivant le modèle IDM présenté précédemment avec les paramètres définis dans le tableau 5.2.

Nous considérons ici des générateurs introduisant des véhicules dans la simulation périodiquement, avec un écart stochastique. Quatre générateurs sont utilisés pour les expériences :

- générateur I :
 - * point d'entrée : E_1

- * point d'arrivée : S_1
- * plan de route : tout droit sans déviation (représenté par les flèches noires dans la figure 5.2)
- * période de génération : 25 ± 5
- générateur II :
 - * point d'entrée : E_2
 - * point d'arrivée : S_2
 - * plan de route : tout droit sans déviation (représenté par les flèches noires dans la figure 5.2)
 - * période de génération : 25 ± 5
- générateur III :
 - * point d'entrée : E_3
 - * point d'arrivée : S_1
 - * plan de route : 7 plans possibles (représentés par les flèches rouges dans la figure 5.2) avec différentes probabilités correspondantes (représentées par les chiffres rouges dans la figure 5.2).
 - * période de génération : 8 ± 7
- générateur IV :
 - * point d'entrée : E_4
 - * point d'arrivée : S_2
 - * plan de route : 7 plans possibles (représentés par les flèches bleues dans la figure 5.2) avec différentes probabilités correspondantes (représentées par les chiffres bleus dans la figure 5.2).
 - * période de génération : 8 ± 7

5.3.2 Observables

Selon les plans qui peuvent être adoptés par les agents, 44 voies sont susceptibles d'être empruntées et les 60 voies restantes resteront vides à tout moment. Ainsi,

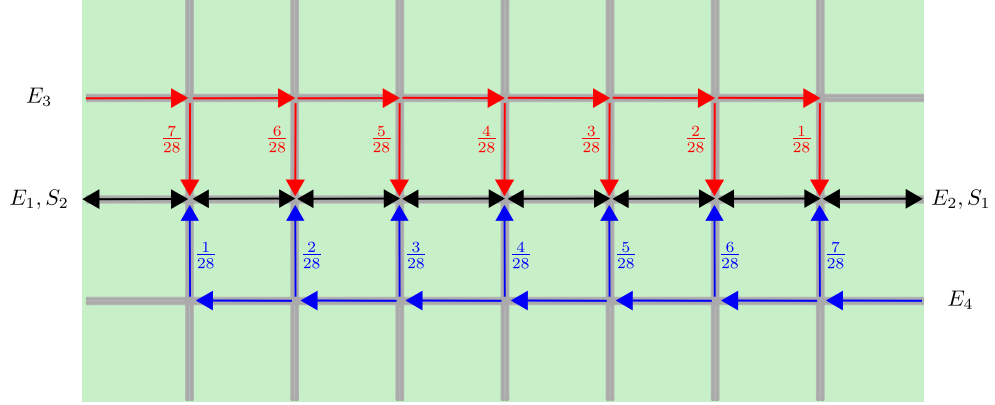


FIGURE 5.2 – Génération des véhicules dans le réseau routier avec le plan emprunté des agents.

pour une réplcation donnée, nous pouvons échantillonner les informations (*e.g.* occupation de la voie, flux de trafic, ...) portées par chacune de ces 44 voies. En omettant les deux voies situées juste avant la sortie, nous obtenons ces observables sous forme de données spatiales multidimensionnelles ($7 \times 6 \times x$ où x est le nombre d'informations considérées).

5.3.3 Solutions envisagées

Comme pour les exemples précédents, nous considérons des solutions potentiellement intéressantes pour le décideur à partir de configurations du modèle. Nous allons d'abord déterminer le seuil à partir duquel une voie l peut être considérée comme congestionnée selon la valeur de sa densité d_l :

$$d_l = \frac{o_l}{L_l} \quad (5.3)$$

où o_l est l'occupation des véhicules présents dans la voie l (en m) et L_l sa longueur (en m également). En échantillonnant expérimentalement le débit de véhicules dans une voie l quelconque du réseau (en nombre de véhicules par s) par rapport à la densité d_l (en nombre de véhicules par m), représenté dans la figure 5.3, nous pouvons déterminer la densité critique $d_c = 0.12$, *i.e.*, le seuil à partir duquel une

voie est congestionnée :

- si $d_l < d_c$ alors nous considérons que le trafic est fluide,
- sinon qu'il est congestionné.

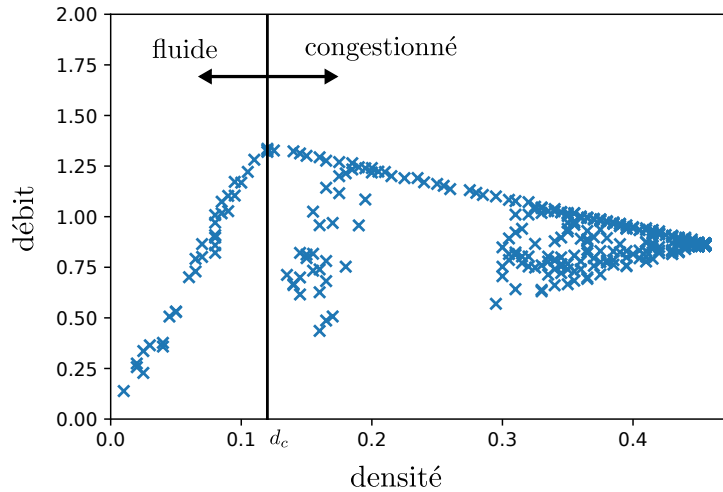


FIGURE 5.3 – Échantillonnage expérimental du débit (en nombre de véhicules par seconde) par rapport à la densité (en nombre de véhicules par mètre) afin de déterminer la densité critique d_c .

Nous divisons ensuite le réseau routier en trois secteurs : nord, centre et sud. Chaque secteur constitue un ensemble de voies (plus exactement 2×7 voies, les voies des différents secteurs sont représentées respectivement par les flèches rouges, noires et bleues dans la figure 5.2). Le niveau de congestion d'un secteur est défini à partir des voies qui le compose. Nous considérons ainsi deux niveaux pour un secteur donné :

- il est fluide, *i.e.* la situation où au maximum 2 voies sont congestionnées,
- il est congestionné, *i.e.* la situation où au moins 7 voies sont congestionnées,

qui forment ici un ensemble $\mathbb{S}$ de 8 solutions ($2 \times 2 \times 2$ pour nord $\times$ centre $\times$ sud) :

- $\mathcal{S}_1$: fluide $\times$ fluide $\times$ fluide
- $\mathcal{S}_2$: fluide $\times$ fluide $\times$ congestionné
- $\mathcal{S}_3$: fluide $\times$ congestionné $\times$ fluide
- $\mathcal{S}_4$: fluide $\times$ congestionné $\times$ congestionné

- $\mathcal{S}_5$: congestionné $\times$ fluide $\times$ fluide
- $\mathcal{S}_6$: congestionné $\times$ fluide $\times$ congestionné
- $\mathcal{S}_7$: congestionné $\times$ congestionné $\times$ fluide
- $\mathcal{S}_8$: congestionné $\times$ congestionné $\times$ congestionné

5.3.4 Résultats obtenus par MC (référence)

Comme dans les exemples précédents, nous souhaitons connaître la vérité sur la probabilité des solutions mentionnées auparavant. 175000 répliques sont donc exécutées par la méthode MC, donnant les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
 P_{ref}(\mathcal{S}_1) &\approx 0.00692 & P_{ref}(\mathcal{S}_2) &\approx 0.00022857 \\
 P_{ref}(\mathcal{S}_3) &\approx 0.0048 & P_{ref}(\mathcal{S}_4) &\approx 0.00114286 \\
 P_{ref}(\mathcal{S}_5) &\approx 0.00018857 & P_{ref}(\mathcal{S}_6) &\approx 0.00021714 \\
 P_{ref}(\mathcal{S}_7) &\approx 0.00145714 & P_{ref}(\mathcal{S}_8) &\approx 0.00437143
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.3.5 Configuration de la politique SPSC

La politique d'exécution SPSC est déterminée par 3 paramètres :

1. Obtention des observables : l'occupation d'une voie et la vitesse moyenne des véhicules au sein d'une voie. Les données issues d'une réplique sont donc de $6 \times 7 \times 2 = 84$ dimensions (cf. section 5.3.2). La politique SPSC reposant sur un partitionnement des données provenant des N (nombre relativement faible) répliques en exécution. Réaliser un partitionnement sur peu de données de grande dimension peut être contre-productif. C'est pourquoi nous réduisons le nombre de dimensions de ces données brutes à l'aide d'un auto-encodeur avant l'étape de partitionnement. La configuration des couches intermédiaires de cet auto-encodeur est représentée dans le tableau 5.3. Les paramètres sont appris sur les données existantes de MC.
2. Partitionnement :
 - (a) K-means
 - (b) K-médoïdes

TABLEAU 5.3 – Configuration de l’auto-encodeur pour l’extraction de caractéristiques.

Encodeur	dimension	Décodeur	dimension
Entrée	$6 \times 7 \times 2$	Entrée	2
couche 1	$3 \times 4 \times 32$	couche 5	128
couche 2	$2 \times 2 \times 64$	couche 6	256
couche 3	128	couche 7	$2 \times 2 \times 64$
couche 4	256	couche 8	$3 \times 4 \times 32$
Encodeur	2	Sortie	$6 \times 7 \times 2$

(c) Agglomérative

(d) DBSCAN

3. Nombre de découpages temporels : Nous découpons l’horizon de simulation en m morceaux en considérant 4 valeurs possibles : $m = 1, 2, 3$ et 4 correspondant à un période de 36000, 24000, 18000 et 14400 pas de temps.

5.3.6 Comparaison des résultats obtenus par SPSC et MC

Dans cette section nous présentons les résultats obtenus pour différentes configurations de SPSC et la méthode classique MC. Pour chaque configuration, 500 lots de 50 répliquions sont exécutés puis comparés selon les mesures mentionnées précédemment (section 4.2.2). Or l’obtention simultanée de toutes les solutions est quasiment impossible avec un lot de 50 répliquions, nous considérons ainsi la métrique $\mathcal{B}_2(\mathbb{S})$ définie dans l’équation 4.2 pour mesurer la capacité de détection. Les tableaux C.1, C.2, C.3, C.4 et C.5 (mis en annexe pour ne pas altérer la lisibilité du document) présentent les taux de détection ($\overline{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_1), \dots, \overline{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_8)$ et $\overline{\mathcal{B}}_2(\mathbb{S})$) et les erreurs d’estimation pour les solutions obtenues pour les différentes configurations de SPSC testées. La figure 5.4 résume ces tableaux en représentant les trois gains relatifs sous la forme de heat maps.

5.3.7 Discussion

D’après la figure 5.4a, nous observons une nette amélioration de la détection des différentes solutions par rapport à la méthode classique MC. Le rapport entre le paramètre K et le taux de détection est identique de celui obtenu pour les exemples

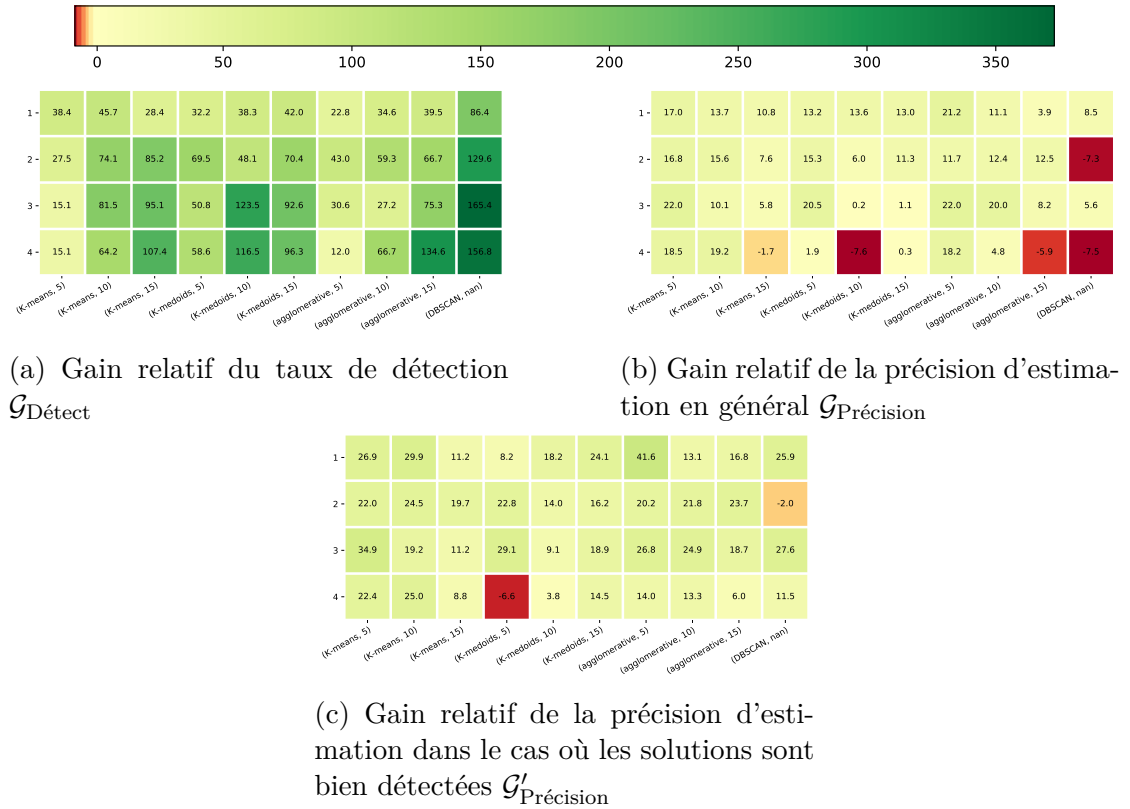


FIGURE 5.4 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détection}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus sur le modèle de transport.

académiques : plus K est grand, plus le taux de détection obtenu par SPSC est important. Néanmoins, la relation entre le nombre de découpages temporels et le taux de détection est différente : plus nous découpons l'intervalle temporel, plus le taux de détection de SPSC est grand. Nous pouvons envisager deux hypothèses non exclusives pouvant expliquer ce phénomène.

horizon de simulation : Dans les exemples académiques ($t_f \leq 1000$), les répliques clonées n'ont probablement pas suffisamment de pas de temps pour que leurs états divergent suffisamment avant l'arrivée de la prochaine étape de partitionnement contrairement au modèle de transport ($t_f = 72000$).

extraction des caractéristiques : L'utilisation d'un auto-encodeur pour extraire les caractéristiques de l'état des répliques dans le cas du modèle de transport permet sans doute un clustering plus efficace que celui appliqué sur les données brutes (sans pré-traitement) issues des modèles académiques.

Comme les exemples précédents, les configurations ayant un bon taux de détection ont en général un gain d'estimation moins important (figure 5.4b). Cependant dans le cas où au moins 2 solutions sont détectées, le gain d'estimation est presque toujours positif sauf dans deux configurations où il est légèrement négatif (figure 5.4c).

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué les performances de la politique d'exécution SPSC sur une simulation de transport routier urbain. Les résultats obtenus permettent de conforter les conclusions du chapitre précédent sur les modèles académiques : SPSC est en général plus efficace que MC dans le contexte étudié pour détecter et estimer la probabilité des solutions possibles. Néanmoins, des investigations supplémentaires seront nécessaires pour mieux comprendre l'influence de certains paramètres (comme le nombre de découpages temporels) sur les performances de SPSC.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons une extension de SPSC utilisant un algorithme de partitionnement probabiliste.

Chapitre 6

Extension probabiliste de SPSC

Sommaire du présent chapitre

6.1 Introduction	95
6.2 Fuzzy c-means	96
6.3 Adaptation à la politique SPSC	97
6.3.1 Estimation de probabilité	97
6.3.2 Sélection des délégués	98
6.4 Expériences	99
6.5 Discussion	99
6.6 Conclusion	101

6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit la politique d'exécution SPSC, puis l'avons évaluée expérimentalement sur différents modèles multi-agents. Les résultats obtenus lors de ces expérimentations démontrent l'efficacité de la méthode SPSC lorsque celle-ci est bien paramétrée. Néanmoins, tels que nous les avons présentés, SPSC et l'estimateur associé imposent, lors de l'étape de partitionnement, qu'une réplique soit assignée à un et un seul cluster. Ainsi, les méthodes

de partitionnement que nous avons présentées dans le chapitre 2 peuvent être qualifiées de crisp (*hard clustering*). L'utilisation d'une méthode de partitionnement flou (*soft clustering*) pourrait nous donner davantage d'informations en considérant qu'une réplique peut être assignée à plusieurs clusters avec différentes probabilités.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Nous commencerons par présenter l'un des algorithmes de partitionnement flou les plus connus : *Fuzzy c-means*. Ensuite, nous introduirons l'extension probabiliste de SPSC afin d'utiliser un tel partitionnement. Enfin, nous comparerons les performances obtenues par des implémentations probabiliste et crisp de SPSC, basées respectivement sur *Fuzzy c-means* et K-means.

6.2 Fuzzy c-means

La méthode de partitionnement floue la plus connue et la plus utilisée est Fuzzy c-means. Elle a été introduite dans les années 70 en modifiant légèrement la méthode K-means [5], [20]. L'idée générale est d'associer à chaque point x de F des coefficients $w_k(x)$ qui représentent le degré d'appartenance aux différents clusters et vérifient les propriétés suivantes [69] :

$$\forall k \in \llbracket 1 ; K \rrbracket, w_k(x) \in [0, 1] \quad (6.1)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k(x) = 1 \quad (6.2)$$

où K est le nombre de clusters prédéfini.

Par rapport à K-means, Fuzzy c-means introduit un nouvel hyper-paramètre $m > 1$ et apporte les modifications suivantes au processus de clustering :

1. Le centre c_k du k -ième cluster $\mathcal{C}_k$ est défini par une moyenne pondérée de tous les points de F et non plus par la moyenne des points situés au sein du cluster $\mathcal{C}_k$:

$$c_k = \frac{\sum_x w_k(x)^m x}{\sum_x w_k(x)^m} \quad (6.3)$$

2. La mise à jour de $w_{ik} = w_k(x_i)$ d'un point x_i :

$$w_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^K \left(\frac{\|x_i - c_k\|}{\|x_i - c_j\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (6.4)$$

L'hyper-paramètre m détermine le niveau de flou (*fuzziness*) de l'algorithme. Une grande valeur de m peut potentiellement diminuer les valeurs w_{ik} d'un point x_i et il sera plus difficile de conclure à quel cluster il appartient. Lorsque m tend vers 1, les coefficients w_{ik} convergent vers 0 ou 1 et forment ainsi un partitionnement crisp.

6.3 Adaptation à la politique SPSC

La politique SPSC présentée dans le chapitre 3 est basée sur un partitionnement crisp. Nous envisageons une adaptation à un partitionnement flou, notamment avec fuzzy c-means, dans l'objectif de rendre l'estimation plus intéressante.

6.3.1 Estimation de probabilité

Dans la section 3.2.2, nous avons vu qu'avec un partitionnement crisp, la probabilité d'intérêt $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_f} \in \mathcal{S})$ pouvait être décomposée puis reconstruite. Celle-ci repose principalement sur l'estimation de la probabilité conditionnelle entre deux pas de temps intermédiaires consécutifs $t_{(i)}$ et $t_{(i+1)}$ (équation (3.6)) :

$$\hat{P}(\mathbf{X}_{t_{(i+1)}} \in C_{\tilde{k}',(i+1)} | \mathbf{X}_{t_{(i)}} \in C_{\tilde{k},(i)}) = \frac{n_{i+1}}{n_i}$$

où $C_{\tilde{k},(i)}$, $C_{\tilde{k}',(i+1)}$ sont des clusters issus d'un partitionnement au temps $t_{(i)}$, $t_{(i+1)}$, n_i est le nombre de clones obtenus à partir des répliquations au sein de $C_{\tilde{k},(i)}$ et n_{i+1} le nombre de répliquations qui arrivent dans le cluster $C_{\tilde{k}',(i+1)}$ parmi ces clones. Cette équation ne peut pas être appliquée dans le cas où nous envisageons un partitionnement non crisp car la signification du nombre n_{i+1} devient ambiguë.

Nous reprenons les notations suivantes dans le cadre d'utilisation de fuzzy c-means : au temps $t_{(i)}$, nous clonons n_i répliquations à partir d'un délégué du cluster $C_{\tilde{k},(i)}$. Selon la politique SPSC, ces clones sont exécutés simultanément

avec d'autres $(N - n_i)$ réplifications entre $t_{(i)}$ et $t_{(i+1)}$. Fuzzy c-means est appliqué sur les états des N réplifications (notés $x_{r,t_{(i+1)}}$ avec $r \in \llbracket 1 ; N \rrbracket$) et associe donc à chaque réplification des coefficients d'appartenance $w_{k,t_{(i+1)}}$ au différents clusters $C_{k,(i+1)}$. L'équation (3.6) peut donc être modifiée par :

$$\hat{P}(\mathbf{X}_{t_{(i+1)}} \in C_{\tilde{k}',(i+1)} | \mathbf{X}_{t_{(i)}} \in C_{\tilde{k},(i)}) = \frac{W_{i+1}}{n_i} \quad (6.5)$$

avec $W_{i+1} = \sum_{x_{t_{(i+1)}} \in \mathcal{R}} w_{\tilde{k}'}(x_{t_{(i+1)}})$ où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des n_i réplifications au temps $t_{(i+1)}$ provenant des n_i clones. Une illustration est représentée dans la figure 6.1.

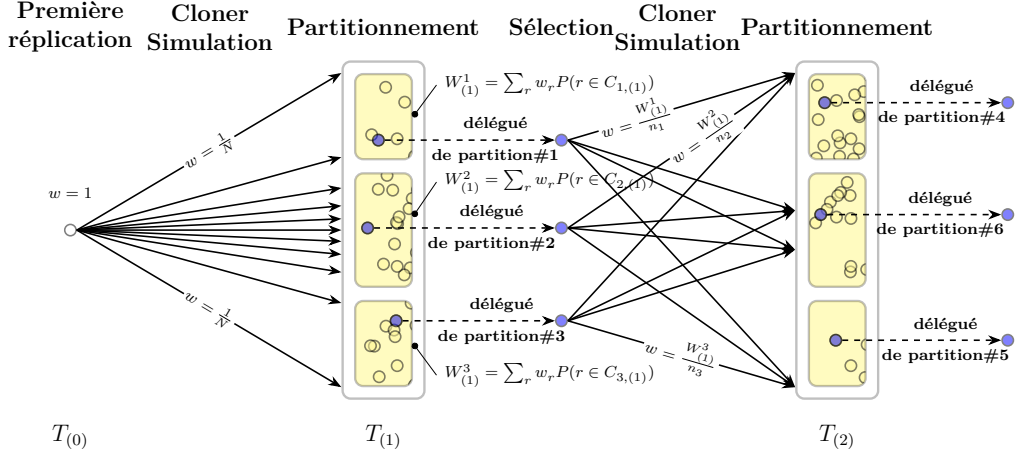


FIGURE 6.1 – Illustration de l'extension probabiliste de SPSC pour le premier et le deuxième découpage. w représente le poids d'une réplification aidant le calcul de $\hat{P}$ au long d'une simulation et $W^k_{(i)}$ désigne l'estimateur de la probabilité $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_{(i)}} \in C_{k,(i)})$.

6.3.2 Sélection des délégués

Nous avons vu dans la section 3.3.2.3 qu'au sein d'un cluster crisp, les délégués sélectionnés sont les points les plus proches du centre (ou médoïdes). De la même manière, pour un cluster $C_{\tilde{k},(i+1)}$ donné, nous pouvons sélectionner la réplification dont le coefficient d'appartenance au cluster $C_{\tilde{k},(i+1)}$ est maximal : $\operatorname{argmax}_x w_{\tilde{k}}(x)$.

6.4 Expériences

Nous évaluons cette extension en exécutant les même expériences que dans les précédents chapitres sur les modèles de proies prédateurs, virus et de transport. L'analyse des résultats obtenus est également présentée sous forme de gain par rapport aux résultats obtenus par la méthode MC (section 4.2). Ensuite, nous comparerons en parallèle ces résultats avec les résultats obtenus avec un partitionnement crisp similaire à celui de fuzzy c-means (*i.e.* K-means). Les résultats issus du modèle de proies prédateurs, de virus et de transport sont respectivement présentés dans les figures 6.2, 6.3 et 6.4.

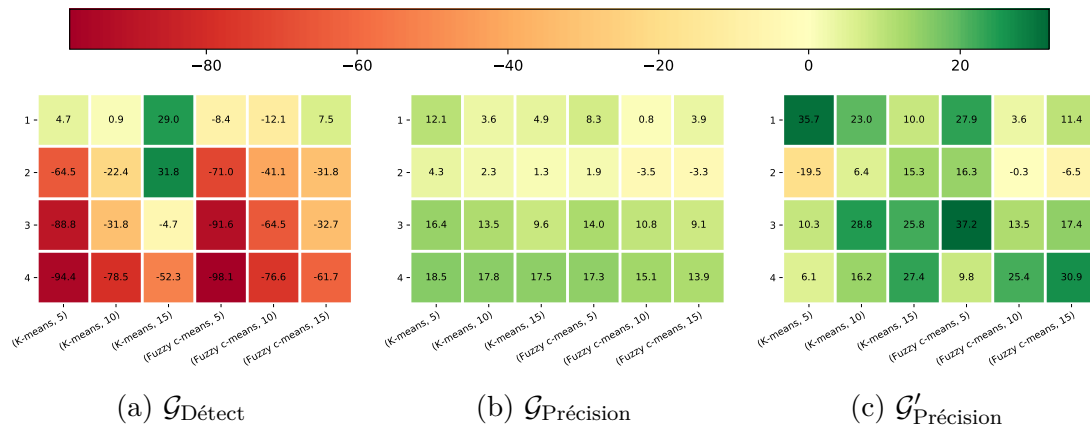


FIGURE 6.2 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détection}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus avec K-means et Fuzzy c-means sur le modèle de proies prédateurs.

6.5 Discussion

Les gains obtenus par l'extension probabiliste de SPSC utilisant Fuzzy c-means sont similaires à ceux obtenus par la version *classique* de SPSC utilisant K-means, mais légèrement moins bons. Dans le cas du modèle de proies prédateurs, le taux de détection est en général moins bon que celui de K-means mais aussi celui de MC (figure 6.2a). Le gain de précision général $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ est au même niveau que K-means (figure 6.2b). Dans le cas où les solutions sont bien détectées, Fuzzy c-means n'est plus précis que K-means que pour des faibles valeurs de K (figure 6.2c).

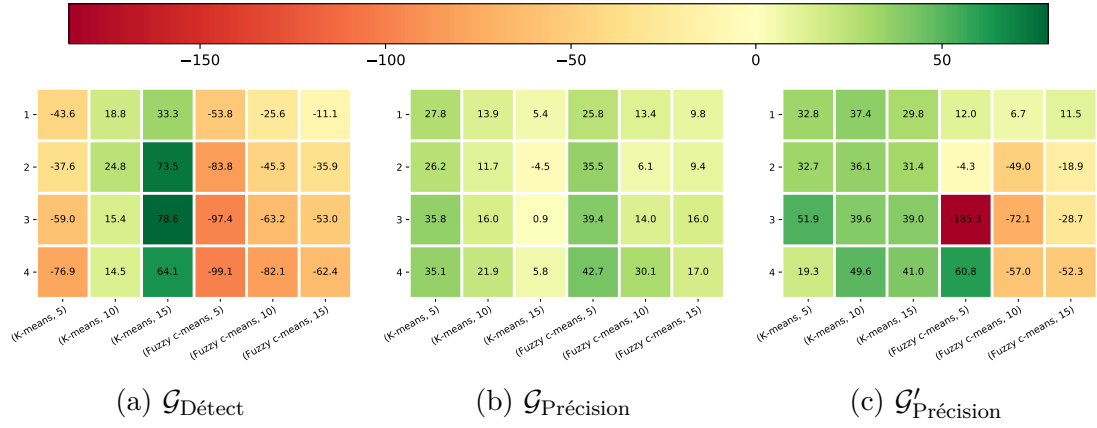


FIGURE 6.3 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détect}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus avec K-means et Fuzzy c-means sur le modèle de virus.

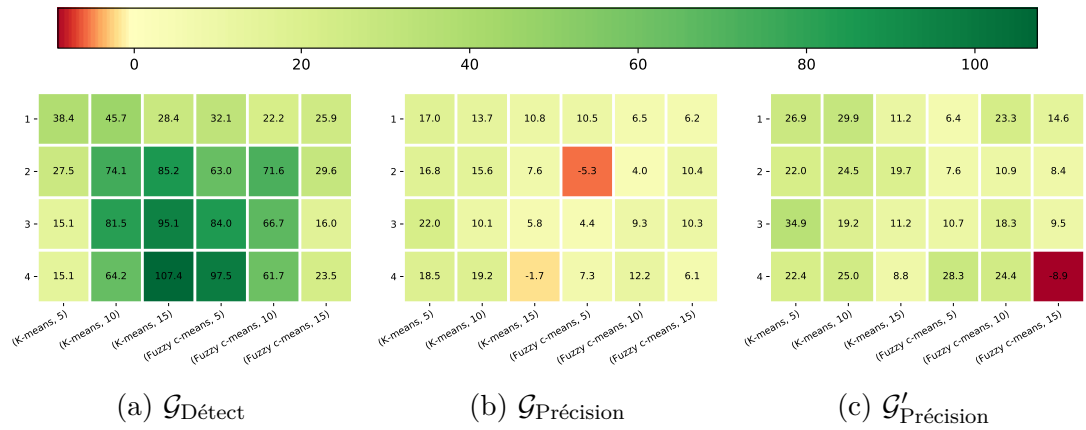


FIGURE 6.4 – Les différents gains relatifs ($\mathcal{G}_{\text{Détect}}$, $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ et $\mathcal{G}'_{\text{Précision}}$) obtenus avec K-means et Fuzzy c-means sur le modèle de transport.

L'utilisation de Fuzzy c-means semble avoir un effet particulièrement négatif sur les résultats des expérimentations sur le modèle de virus, le taux de détection étant inférieur à celui de MC pour toutes les configurations (figure 6.3a). Le gain de précision général $\mathcal{G}_{\text{Précision}}$ est du même ordre que K-means (figure 6.3b) mais médiocre dans le cas où les solutions sont bien détectées (figure 6.3c). Dans le cas du modèle de transport, le taux de détection est amélioré pour $K = 5$ mais moins bon pour $K = 15$ (figure 6.4a). Les gains de précision (figures 6.4b et 6.4c) sont légèrement moins bons que K-means.

Les résultats montrent que, contrairement à ce que nous espérions, l'utilisation de Fuzzy c-means n'est meilleure qu'un partitionnement crisp pour peu de configurations de SPSC. L'hypothèse suivante pourrait expliquer ce phénomène : la sélection de délégué selon le maximum des coefficients d'appartenance n'est peut être pas pertinent. En effet, les coefficients w_k et les centres c_k sont calculés sur tous les points de l'ensemble F . S'il existe des points aberrants ou des points qui ne sont pas facilement assignés (le maximum des w_k étant faible), les délégués sélectionnés avec ce critère ne seraient pas les meilleurs. La figure 6.5 montre un cas d'utilisation de Fuzzy c-means et de K-means avec $K = 10$ sur 50 répliques du modèle de proies prédateurs. Nous observons bien que les deux répliques isolées en bas à gauche (et susceptibles de conduire aux solutions $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$) sont bien associées par K-means à un petit cluster alors que Fuzzy c-means ne les considère pas comme un cluster mais deux points ayant une faible appartenance à tous les clusters.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une extension intégrant un partitionnement flou classique (Fuzzy c-means) à la politique d'exécution SPSC. Cette extension est appliquée sur les trois modèles de simulations présentés dans les chapitres précédents et les résultats obtenus sont comparés avec K-means, celui-ci étant un algorithme de partitionnement crisp. Les résultats obtenus avec ce type de partitionnement présentent une légère diminution de performance par rapport à un partitionnement crisp tout en restant plus efficace que la méthode classique MC.

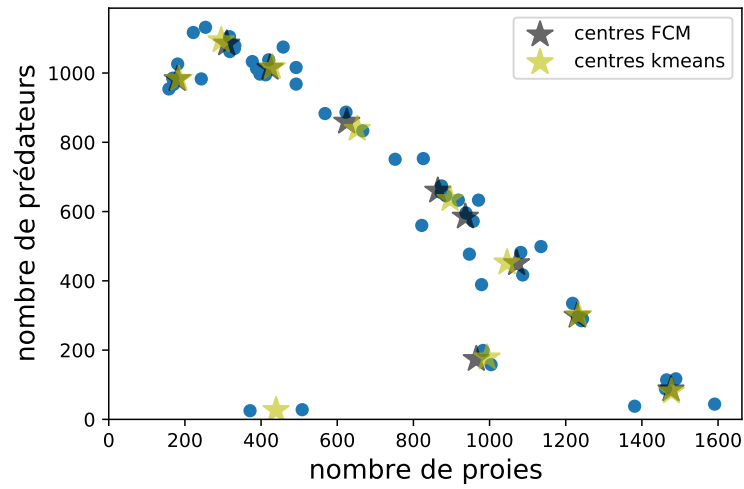


FIGURE 6.5 – Exemple d’application de Fuzzy c-means et de K-means sur un ensemble de 50 réplifications du modèle de proies prédateurs.

Dans le chapitre suivant, nous récapitulerons les travaux effectués et les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse, puis évoquerons les perspectives principales de ce travail.

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons introduit une nouvelle politique d'exécution de simulations stochastiques, SPSC, qui a pour but d'explorer l'ensemble des solutions possibles et d'estimer leur probabilité d'occurrence étant donné des ressources computationnelles limitées. Traitant les simulations comme des boîtes noires et ne nécessitant pas d'information sur les solutions d'intérêt en amont, l'approche SPSC peut être considérée comme générique contrairement aux différents travaux évoqués dans la section 1.4 portant sur la recherche de solutions rares. La seule contrainte opérationnelle imposée par SPSC au moteur de simulation est la capacité à cloner une réplcation à un pas de temps t quelconque.

Différentes configurations possibles de SPSC (méthode de partitionnement, valeur de K et nombre de découpages) ont été évaluées sur trois modèles multi-agents différents implémentés dans l'environnement de simulation SIMILAR. Ces résultats ont montré qu'en général SPSC est plus efficace que MC en matière de détection de solutions d'intérêt et de précision d'estimation. Certaines configurations (grande valeur de K et faible nombre de découpages) permettent d'obtenir d'excellents résultats sur ces deux aspects.

Les expérimentations réalisées sur le modèle de transport ont été effectuées sur une topologie simple et réduite. Des études portant sur une configuration d'une ville réelle sont donc souhaitées. Une telle configuration induit un très grand coût de calcul, qui pourrait mettre en évidence davantage encore l'intérêt de SPSC.

Des études supplémentaires peuvent être envisagées afin de mieux comprendre le fonctionnement de la politique SPSC. Par exemple, plusieurs méthodes de détermination du nombre de clones pour chaque réplcation sélectionnée peuvent être envisagées. Dans le cadre de cette thèse, nous avons implémenté, pour des raisons de simplicité, uniquement la méthode que nous avons appelé *équilibre* dans la sec-

tion 3.3.2.4, pour laquelle le nombre de clones est le plus uniforme possible pour toutes les répliques sélectionnées. Nous pouvons imaginer que si le nombre de clones est déterminé de manière proportionnelle à la taille du cluster dont la réplique provient, SPSC pourrait se rapprocher de MC en favorisant les solutions les plus fréquentes. Au contraire, si le nombre de clones est déterminé de manière proportionnelle à l'inverse de la taille du cluster, cela peut potentiellement favoriser la détection de solutions plus rares. Des résultats préliminaires ont confirmé ces intuitions, mais les estimations de la probabilité de solutions n'étaient pas aussi précises que celles données par la méthode MC. Des investigations plus poussées devront être menées afin de tirer des conclusions plus claires à ce sujet.

Les travaux concernant l'extension probabiliste de SPSC utilisant un algorithme de partitionnement flou classique (*Fuzzy c-means*), ont été détaillés dans le chapitre 6. Ces travaux peuvent être complétés par des investigations portant sur le fonctionnement de *Fuzzy c-means* afin d'améliorer les résultats obtenus. D'autres algorithmes de partitionnement flou (*e.g.* basé sur la théorie de fonction de croyance [15], [16], [49]) peuvent être envisagés en révisant la reconstruction de l'estimateur de probabilité ainsi que la sélection des délégués.

Par ailleurs, dans le cadre de ce travail, SPSC s'est également révélée utile pour résoudre un problème pour lequel elle n'avait pas été conçue : identifier des bugs dans l'implémentation d'un modèle pouvant conduire, dans des cas rares et donc difficilement détectables, à des situations aberrantes. Ce fut notamment le cas dans la simulation de transport routier présentée dans le chapitre 5. SPSC a ainsi permis de mettre en évidence des erreurs de conception dans le modèle de perception des agents véhicules pouvant conduire, dans certaines conditions, à un non respect des priorités dans une intersection. Un bug est ainsi vu comme une solution rare (bien que non souhaitable et à éliminer en corrigeant le modèle) de la simulation. Néanmoins, des expérimentations complémentaires sont nécessaires afin de démontrer la pertinence de SPSC pour résoudre ce problème dans le cas général.

De plus, il est à noter que dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé SPSC seulement à des fins de prédiction. Il pourrait être intéressant de mettre en oeuvre notre méthode pour résoudre les problèmes plus complexes évoqués dans la section 1.2.2 comme la calibration et l'analyse de sensibilité d'un modèle ou

encore la résolution de problèmes inverses. Dans ce dernier cas, très gourmand en ressources, SPSC pourrait se révéler particulièrement efficace par exemple pour déterminer les conditions initiales permettant d'obtenir un état final donné ou plus généralement explorer les paramétrages possibles permettant d'obtenir une solution particulière.

Enfin, il pourrait être pertinent de tester SPSC sur des plate-formes de simulation différentes (multi-agents ou non) et des environnement d'exploration de modèles comme OpenMOLE [68].

Annexe A

Résultats du modèle de proies prédateurs

A.1 Paramétrage de référence

N	méthode	k	m	$\bar{B}(\mathcal{S}_1)$	$\bar{B}(\mathcal{S}_2)$	$\bar{B}(\mathcal{S}_3)$	$\bar{B}_3(\mathcal{S})$
50	K-means	5	1	0.206	0.392	1.000	0.112
			2	0.218	0.253	1.000	0.038
			3	0.155	0.118	1.000	0.012
			4	0.055	0.129	1.000	0.006
		10	1	0.248	0.390	1.000	0.108
			2	0.231	0.415	1.000	0.083
			3	0.197	0.271	1.000	0.073
			4	0.085	0.323	1.000	0.023
		15	1	0.256	0.501	1.000	0.138
			2	0.278	0.518	1.000	0.141
			3	0.240	0.426	1.000	0.102
			4	0.143	0.426	1.000	0.051
	K-medoids	5	1	0.226	0.343	1.000	0.103
			2	0.202	0.236	1.000	0.044
			3	0.142	0.115	1.000	0.022
			4	0.069	0.153	1.000	0.008
		10	1	0.258	0.518	1.000	0.147
			2	0.237	0.394	1.000	0.088
			3	0.227	0.311	1.000	0.076
			4	0.135	0.341	1.000	0.034
		15	1	0.249	0.557	1.000	0.142
			2	0.280	0.443	1.000	0.115
			3	0.287	0.484	1.000	0.138
			4	0.193	0.432	1.000	0.076
	agglomerative	5	1	0.218	0.385	1.000	0.110
			2	0.202	0.275	1.000	0.039
			3	0.136	0.107	1.000	0.010
			4	0.059	0.128	1.000	0.005
		10	1	0.232	0.433	1.000	0.105
			2	0.257	0.422	1.000	0.105
			3	0.227	0.270	1.000	0.063
			4	0.095	0.333	1.000	0.024
		15	1	0.244	0.480	1.000	0.121
			2	0.273	0.469	1.000	0.117
			3	0.277	0.412	1.000	0.123
			4	0.154	0.464	1.000	0.071
	ts-K-means	5	1	0.264	0.423	1.000	0.123
			2	0.206	0.206	1.000	0.039
			3	0.182	0.144	1.000	0.028
			4	0.095	0.116	1.000	0.021
		10	1	0.243	0.470	1.000	0.124
			2	0.219	0.378	1.000	0.078
			3	0.247	0.232	1.000	0.062
			4	0.130	0.277	1.000	0.023
		15	1	0.231	0.501	1.000	0.128
			2	0.254	0.453	1.000	0.119
			3	0.270	0.357	1.000	0.105
			4	0.169	0.413	1.000	0.061
	DBSCAN	$\emptyset$	1	0.245	0.624	1.000	0.158
			2	0.257	0.531	1.000	0.137
			3	0.247	0.450	1.000	0.104
			4	0.231	0.453	1.000	0.096
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	0.222	0.469	1.000	0.107

N	méthode	k	m	$\overline{B}(\mathcal{S}_1)$	$\overline{B}(\mathcal{S}_2)$	$\overline{B}(\mathcal{S}_3)$	$\overline{B}_3(\mathbb{S})$
30	K-means	5	1	0.121	0.279	1.000	0.045
			2	0.143	0.243	1.000	0.024
			3	0.114	0.094	1.000	0.017
			4	0.048	0.129	1.000	0.005
		10	1	0.152	0.349	1.000	0.054
			2	0.157	0.330	1.000	0.047
			3	0.171	0.300	1.000	0.051
			4	0.087	0.273	1.000	0.026
		15	1	0.152	0.359	1.000	0.063
			2	0.159	0.361	1.000	0.048
			3	0.179	0.357	1.000	0.066
			4	0.160	0.349	1.000	0.057
	K-medoids	5	1	0.141	0.304	1.000	0.054
			2	0.129	0.224	1.000	0.024
			3	0.132	0.151	1.000	0.018
			4	0.043	0.148	1.000	0.002
		10	1	0.157	0.374	1.000	0.054
			2	0.173	0.300	1.000	0.053
			3	0.176	0.315	1.000	0.059
			4	0.139	0.320	1.000	0.034
		15	1	0.166	0.360	1.000	0.053
			2	0.183	0.328	1.000	0.060
			3	0.192	0.359	1.000	0.072
			4	0.171	0.359	1.000	0.065
	agglomerative	5	1	0.136	0.287	1.000	0.058
			2	0.139	0.234	1.000	0.024
			3	0.115	0.098	1.000	0.010
			4	0.054	0.154	1.000	0.003
		10	1	0.157	0.349	1.000	0.057
			2	0.167	0.364	1.000	0.052
			3	0.182	0.277	1.000	0.057
			4	0.085	0.320	1.000	0.024
		15	1	0.162	0.368	1.000	0.064
			2	0.174	0.335	1.000	0.052
			3	0.174	0.395	1.000	0.073
			4	0.166	0.361	1.000	0.061
	ts-K-means	5	1	0.173	0.320	1.000	0.070
			2	0.150	0.164	1.000	0.021
			3	0.133	0.108	1.000	0.017
			4	0.079	0.133	1.000	0.005
		10	1	0.153	0.340	1.000	0.056
			2	0.141	0.255	1.000	0.033
			3	0.141	0.217	1.000	0.029
			4	0.109	0.265	1.000	0.029
		15	1	0.178	0.343	1.000	0.051
			2	0.150	0.323	1.000	0.042
			3	0.166	0.305	1.000	0.043
			4	0.151	0.355	1.000	0.057
	DBSCAN	$\emptyset$	1	0.162	0.401	1.000	0.057
			2	0.171	0.352	1.000	0.047
			3	0.165	0.337	1.000	0.059
			4	0.142	0.323	1.000	0.038
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	0.140	0.313	1.000	0.045

TABLEAU A.1 – Résultats issus du jeu de paramètres de base des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err(S_1)$	$Err(S_2)$	$Err(S_3)$	$Err(S)$
50	K-means	5	1	$6.85 \pm 6.25e^{-03}$	$1.24 \pm 0.66e^{-02}$	$1.63 \pm 0.87e^{-02}$	$2.23 \pm 1.25e^{+00}$
			2	$7.72 \pm 7.33e^{-03}$	$1.30 \pm 0.68e^{-02}$	$1.60 \pm 0.97e^{-02}$	$2.42 \pm 1.43e^{+00}$
			3	$6.13 \pm 4.56e^{-03}$	$1.27 \pm 0.41e^{-02}$	$1.70 \pm 0.59e^{-02}$	$2.12 \pm 0.90e^{+00}$
			4	$5.75 \pm 2.74e^{-03}$	$1.29 \pm 0.67e^{-02}$	$1.77 \pm 0.69e^{-02}$	$2.06 \pm 0.74e^{+00}$
		10	1	$8.09 \pm 8.06e^{-03}$	$1.23 \pm 0.77e^{-02}$	$1.63 \pm 0.97e^{-02}$	$2.44 \pm 1.57e^{+00}$
			2	$7.39 \pm 6.31e^{-03}$	$1.43 \pm 1.13e^{-02}$	$1.70 \pm 1.21e^{-02}$	$2.47 \pm 1.45e^{+00}$
			3	$6.36 \pm 5.82e^{-03}$	$1.31 \pm 0.89e^{-02}$	$1.75 \pm 0.96e^{-02}$	$2.19 \pm 1.28e^{+00}$
			4	$6.21 \pm 4.43e^{-03}$	$1.21 \pm 0.69e^{-02}$	$1.62 \pm 0.76e^{-02}$	$2.08 \pm 0.95e^{+00}$
		15	1	$8.28 \pm 8.23e^{-03}$	$1.15 \pm 0.84e^{-02}$	$1.56 \pm 1.09e^{-02}$	$2.41 \pm 1.62e^{+00}$
			2	$7.68 \pm 7.48e^{-03}$	$1.40 \pm 1.08e^{-02}$	$1.68 \pm 1.26e^{-02}$	$2.50 \pm 1.60e^{+00}$
			3	$6.94 \pm 7.79e^{-03}$	$1.30 \pm 1.03e^{-02}$	$1.66 \pm 1.12e^{-02}$	$2.29 \pm 1.61e^{+00}$
			4	$6.25 \pm 5.04e^{-03}$	$1.21 \pm 0.78e^{-02}$	$1.57 \pm 0.82e^{-02}$	$2.09 \pm 1.08e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$7.58 \pm 7.18e^{-03}$	$1.23 \pm 0.73e^{-02}$	$1.63 \pm 0.93e^{-02}$	$2.35 \pm 1.41e^{+00}$
			2	$7.61 \pm 6.41e^{-03}$	$1.35 \pm 0.91e^{-02}$	$1.67 \pm 1.04e^{-02}$	$2.45 \pm 1.36e^{+00}$
			3	$6.17 \pm 4.64e^{-03}$	$1.31 \pm 0.60e^{-02}$	$1.78 \pm 0.76e^{-02}$	$2.15 \pm 1.01e^{+00}$
			4	$5.95 \pm 3.60e^{-03}$	$1.28 \pm 0.62e^{-02}$	$1.75 \pm 0.67e^{-02}$	$2.09 \pm 0.82e^{+00}$
		10	1	$8.34 \pm 8.81e^{-03}$	$1.29 \pm 1.01e^{-02}$	$1.70 \pm 1.19e^{-02}$	$2.53 \pm 1.75e^{+00}$
			2	$8.03 \pm 8.65e^{-03}$	$1.47 \pm 1.16e^{-02}$	$1.79 \pm 1.30e^{-02}$	$2.61 \pm 1.79e^{+00}$
			3	$7.26 \pm 8.03e^{-03}$	$1.36 \pm 1.11e^{-02}$	$1.76 \pm 1.22e^{-02}$	$2.39 \pm 1.71e^{+00}$
			4	$6.68 \pm 7.33e^{-03}$	$1.28 \pm 0.86e^{-02}$	$1.66 \pm 0.97e^{-02}$	$2.23 \pm 1.48e^{+00}$
		15	1	$8.07 \pm 8.09e^{-03}$	$1.20 \pm 1.00e^{-02}$	$1.53 \pm 1.16e^{-02}$	$2.41 \pm 1.65e^{+00}$
			2	$8.26 \pm 9.24e^{-03}$	$1.46 \pm 1.30e^{-02}$	$1.78 \pm 1.53e^{-02}$	$2.65 \pm 2.00e^{+00}$
			3	$7.47 \pm 8.57e^{-03}$	$1.38 \pm 1.29e^{-02}$	$1.72 \pm 1.39e^{-02}$	$2.44 \pm 1.85e^{+00}$
			4	$6.99 \pm 8.28e^{-03}$	$1.30 \pm 0.97e^{-02}$	$1.64 \pm 1.03e^{-02}$	$2.30 \pm 1.65e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$6.96 \pm 6.34e^{-03}$	$1.24 \pm 0.67e^{-02}$	$1.62 \pm 0.82e^{-02}$	$2.24 \pm 1.26e^{+00}$
			2	$7.48 \pm 5.85e^{-03}$	$1.30 \pm 0.78e^{-02}$	$1.60 \pm 1.03e^{-02}$	$2.38 \pm 1.21e^{+00}$
			3	$6.06 \pm 4.31e^{-03}$	$1.30 \pm 0.64e^{-02}$	$1.82 \pm 1.16e^{-02}$	$2.13 \pm 0.93e^{+00}$
			4	$5.62 \pm 1.74e^{-03}$	$1.23 \pm 0.38e^{-02}$	$1.89 \pm 1.85e^{-02}$	$2.00 \pm 0.43e^{+00}$
		10	1	$7.88 \pm 7.65e^{-03}$	$1.21 \pm 0.76e^{-02}$	$1.58 \pm 1.00e^{-02}$	$2.38 \pm 1.49e^{+00}$
			2	$7.69 \pm 7.91e^{-03}$	$1.35 \pm 0.97e^{-02}$	$1.67 \pm 1.25e^{-02}$	$2.46 \pm 1.60e^{+00}$
			3	$6.84 \pm 7.94e^{-03}$	$1.29 \pm 0.82e^{-02}$	$1.77 \pm 1.43e^{-02}$	$2.26 \pm 1.59e^{+00}$
			4	$5.97 \pm 3.38e^{-03}$	$1.27 \pm 0.88e^{-02}$	$1.70 \pm 1.06e^{-02}$	$2.09 \pm 0.93e^{+00}$
		15	1	$7.94 \pm 7.25e^{-03}$	$1.15 \pm 0.82e^{-02}$	$1.50 \pm 1.05e^{-02}$	$2.35 \pm 1.46e^{+00}$
			2	$7.62 \pm 7.56e^{-03}$	$1.34 \pm 0.94e^{-02}$	$1.63 \pm 1.29e^{-02}$	$2.44 \pm 1.60e^{+00}$
			3	$7.21 \pm 7.63e^{-03}$	$1.22 \pm 0.78e^{-02}$	$1.62 \pm 1.08e^{-02}$	$2.27 \pm 1.50e^{+00}$
			4	$6.69 \pm 5.93e^{-03}$	$1.24 \pm 0.88e^{-02}$	$1.62 \pm 1.12e^{-02}$	$2.20 \pm 1.32e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$7.87 \pm 7.46e^{-03}$	$1.33 \pm 1.18e^{-02}$	$1.68 \pm 1.28e^{-02}$	$2.48 \pm 1.62e^{+00}$
			2	$7.77 \pm 7.06e^{-03}$	$1.45 \pm 1.09e^{-02}$	$1.76 \pm 1.17e^{-02}$	$2.55 \pm 1.53e^{+00}$
			3	$6.97 \pm 7.05e^{-03}$	$1.38 \pm 1.50e^{-02}$	$1.82 \pm 1.64e^{-02}$	$2.36 \pm 1.75e^{+00}$
			4	$6.44 \pm 6.99e^{-03}$	$1.33 \pm 0.75e^{-02}$	$1.84 \pm 0.98e^{-02}$	$2.22 \pm 1.42e^{+00}$
		10	1	$7.45 \pm 7.16e^{-03}$	$1.38 \pm 1.22e^{-02}$	$1.73 \pm 1.33e^{-02}$	$2.44 \pm 1.61e^{+00}$
			2	$8.00 \pm 7.84e^{-03}$	$1.46 \pm 1.18e^{-02}$	$1.78 \pm 1.37e^{-02}$	$2.61 \pm 1.68e^{+00}$
			3	$7.54 \pm 8.46e^{-03}$	$1.44 \pm 1.21e^{-02}$	$1.82 \pm 1.36e^{-02}$	$2.51 \pm 1.83e^{+00}$
			4	$7.31 \pm 11.90e^{-03}$	$1.32 \pm 0.91e^{-02}$	$1.84 \pm 1.44e^{-02}$	$2.37 \pm 2.25e^{+00}$
		15	1	$8.09 \pm 9.23e^{-03}$	$1.30 \pm 1.08e^{-02}$	$1.69 \pm 1.29e^{-02}$	$2.49 \pm 1.86e^{+00}$
			2	$8.41 \pm 9.07e^{-03}$	$1.43 \pm 1.21e^{-02}$	$1.79 \pm 1.39e^{-02}$	$2.65 \pm 1.88e^{+00}$
			3	$7.56 \pm 9.55e^{-03}$	$1.44 \pm 1.36e^{-02}$	$1.84 \pm 1.63e^{-02}$	$2.51 \pm 2.11e^{+00}$
			4	$7.02 \pm 8.62e^{-03}$	$1.32 \pm 1.21e^{-02}$	$1.73 \pm 1.42e^{-02}$	$2.32 \pm 1.84e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$8.51 \pm 13.60e^{-03}$	$1.13 \pm 1.22e^{-02}$	$1.57 \pm 1.78e^{-02}$	$2.43 \pm 2.65e^{+00}$
			2	$7.56 \pm 10.30e^{-03}$	$1.49 \pm 1.91e^{-02}$	$1.88 \pm 2.00e^{-02}$	$2.55 \pm 2.39e^{+00}$
			3	$6.13 \pm 6.87e^{-03}$	$1.25 \pm 1.17e^{-02}$	$1.66 \pm 1.38e^{-02}$	$2.10 \pm 1.56e^{+00}$
			4	$6.53 \pm 7.55e^{-03}$	$1.22 \pm 1.07e^{-02}$	$1.72 \pm 1.55e^{-02}$	$2.15 \pm 1.60e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$8.12 \pm 5.86e^{-03}$	$1.34 \pm 0.83e^{-02}$	$1.47 \pm 1.22e^{-02}$	$2.53 \pm 1.26e^{+00}$

N	méthode	k	m	$Err(\mathcal{S}_1)$	$Err(\mathcal{S}_2)$	$Err(\mathcal{S}_3)$	$Err(\mathbb{S})$
30	K-means	5	1	$7.64 \pm 9.22e^{-03}$	$1.40 \pm 1.08e^{-02}$	$1.89 \pm 1.22e^{-02}$	$2.49 \pm 1.88e^{+00}$
			2	$8.11 \pm 8.90e^{-03}$	$1.49 \pm 1.18e^{-02}$	$1.89 \pm 1.26e^{-02}$	$2.65 \pm 1.86e^{+00}$
			3	$7.09 \pm 8.40e^{-03}$	$1.41 \pm 1.05e^{-02}$	$1.95 \pm 1.32e^{-02}$	$2.41 \pm 1.87e^{+00}$
			4	$6.36 \pm 8.61e^{-03}$	$1.37 \pm 0.90e^{-02}$	$1.88 \pm 1.12e^{-02}$	$2.24 \pm 1.72e^{+00}$
		10	1	$8.91 \pm 11.30e^{-03}$	$1.46 \pm 1.27e^{-02}$	$1.95 \pm 1.51e^{-02}$	$2.77 \pm 2.28e^{+00}$
			2	$8.15 \pm 9.16e^{-03}$	$1.64 \pm 1.49e^{-02}$	$2.02 \pm 1.56e^{-02}$	$2.77 \pm 2.02e^{+00}$
			3	$7.94 \pm 11.30e^{-03}$	$1.54 \pm 1.40e^{-02}$	$2.01 \pm 1.70e^{-02}$	$2.66 \pm 2.37e^{+00}$
			4	$6.56 \pm 6.15e^{-03}$	$1.38 \pm 1.23e^{-02}$	$1.81 \pm 1.33e^{-02}$	$2.28 \pm 1.57e^{+00}$
		15	1	$9.51 \pm 12.80e^{-03}$	$1.46 \pm 1.22e^{-02}$	$1.93 \pm 1.54e^{-02}$	$2.87 \pm 2.44e^{+00}$
			2	$8.78 \pm 11.00e^{-03}$	$1.64 \pm 1.51e^{-02}$	$2.04 \pm 1.72e^{-02}$	$2.89 \pm 2.33e^{+00}$
			3	$8.85 \pm 13.30e^{-03}$	$1.57 \pm 1.55e^{-02}$	$2.03 \pm 1.85e^{-02}$	$2.84 \pm 2.68e^{+00}$
			4	$8.32 \pm 11.90e^{-03}$	$1.51 \pm 1.54e^{-02}$	$1.97 \pm 1.93e^{-02}$	$2.70 \pm 2.54e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$8.05 \pm 10.20e^{-03}$	$1.51 \pm 1.30e^{-02}$	$1.99 \pm 1.49e^{-02}$	$2.65 \pm 2.11e^{+00}$
			2	$8.59 \pm 11.20e^{-03}$	$1.63 \pm 1.60e^{-02}$	$2.12 \pm 1.72e^{-02}$	$2.85 \pm 2.39e^{+00}$
			3	$7.58 \pm 10.60e^{-03}$	$1.51 \pm 1.47e^{-02}$	$2.00 \pm 1.59e^{-02}$	$2.57 \pm 2.23e^{+00}$
			4	$6.42 \pm 9.02e^{-03}$	$1.47 \pm 1.35e^{-02}$	$1.97 \pm 1.39e^{-02}$	$2.33 \pm 1.93e^{+00}$
		10	1	$9.00 \pm 12.10e^{-03}$	$1.56 \pm 1.42e^{-02}$	$2.01 \pm 1.68e^{-02}$	$2.86 \pm 2.48e^{+00}$
			2	$9.23 \pm 12.30e^{-03}$	$1.60 \pm 1.49e^{-02}$	$2.09 \pm 1.69e^{-02}$	$2.94 \pm 2.49e^{+00}$
			3	$8.88 \pm 12.80e^{-03}$	$1.67 \pm 1.96e^{-02}$	$2.17 \pm 2.24e^{-02}$	$2.93 \pm 2.85e^{+00}$
			4	$8.58 \pm 12.90e^{-03}$	$1.73 \pm 2.03e^{-02}$	$2.22 \pm 2.10e^{-02}$	$2.92 \pm 2.80e^{+00}$
		15	1	$9.46 \pm 12.40e^{-03}$	$1.53 \pm 1.27e^{-02}$	$1.96 \pm 1.64e^{-02}$	$2.92 \pm 2.45e^{+00}$
			2	$9.19 \pm 12.30e^{-03}$	$1.65 \pm 1.53e^{-02}$	$2.11 \pm 1.79e^{-02}$	$2.97 \pm 2.55e^{+00}$
			3	$9.21 \pm 13.10e^{-03}$	$1.62 \pm 1.71e^{-02}$	$2.13 \pm 1.92e^{-02}$	$2.95 \pm 2.68e^{+00}$
			4	$8.94 \pm 14.80e^{-03}$	$1.60 \pm 1.82e^{-02}$	$2.09 \pm 2.17e^{-02}$	$2.89 \pm 3.04e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$7.62 \pm 9.08e^{-03}$	$1.48 \pm 1.24e^{-02}$	$1.96 \pm 1.44e^{-02}$	$2.55 \pm 1.97e^{+00}$
			2	$8.45 \pm 9.68e^{-03}$	$1.51 \pm 1.16e^{-02}$	$1.98 \pm 1.34e^{-02}$	$2.73 \pm 1.97e^{+00}$
			3	$7.01 \pm 8.00e^{-03}$	$1.38 \pm 0.96e^{-02}$	$1.95 \pm 1.33e^{-02}$	$2.36 \pm 1.69e^{+00}$
			4	$6.24 \pm 4.86e^{-03}$	$1.32 \pm 0.90e^{-02}$	$1.85 \pm 1.19e^{-02}$	$2.18 \pm 1.16e^{+00}$
		10	1	$9.03 \pm 11.50e^{-03}$	$1.40 \pm 1.20e^{-02}$	$1.91 \pm 1.54e^{-02}$	$2.74 \pm 2.27e^{+00}$
			2	$8.74 \pm 10.90e^{-03}$	$1.61 \pm 1.51e^{-02}$	$2.03 \pm 1.71e^{-02}$	$2.86 \pm 2.31e^{+00}$
			3	$7.94 \pm 11.10e^{-03}$	$1.45 \pm 1.42e^{-02}$	$1.94 \pm 1.68e^{-02}$	$2.59 \pm 2.31e^{+00}$
			4	$7.63 \pm 11.80e^{-03}$	$1.41 \pm 1.30e^{-02}$	$1.93 \pm 1.58e^{-02}$	$2.50 \pm 2.36e^{+00}$
		15	1	$9.39 \pm 12.00e^{-03}$	$1.51 \pm 1.18e^{-02}$	$1.97 \pm 1.58e^{-02}$	$2.89 \pm 2.38e^{+00}$
			2	$9.29 \pm 12.10e^{-03}$	$1.65 \pm 1.54e^{-02}$	$2.12 \pm 1.77e^{-02}$	$2.98 \pm 2.47e^{+00}$
			3	$8.36 \pm 12.00e^{-03}$	$1.57 \pm 1.65e^{-02}$	$2.03 \pm 1.93e^{-02}$	$2.76 \pm 2.56e^{+00}$
			4	$8.71 \pm 12.70e^{-03}$	$1.59 \pm 1.72e^{-02}$	$2.09 \pm 2.10e^{-02}$	$2.84 \pm 2.75e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$8.55 \pm 10.90e^{-03}$	$1.66 \pm 1.63e^{-02}$	$2.15 \pm 1.75e^{-02}$	$2.86 \pm 2.36e^{+00}$
			2	$8.70 \pm 10.00e^{-03}$	$1.60 \pm 1.30e^{-02}$	$2.08 \pm 1.47e^{-02}$	$2.84 \pm 2.05e^{+00}$
			3	$8.41 \pm 12.40e^{-03}$	$1.58 \pm 1.93e^{-02}$	$2.17 \pm 2.15e^{-02}$	$2.78 \pm 2.70e^{+00}$
			4	$7.98 \pm 14.20e^{-03}$	$1.46 \pm 1.20e^{-02}$	$2.08 \pm 1.85e^{-02}$	$2.60 \pm 2.74e^{+00}$
		10	1	$8.78 \pm 12.20e^{-03}$	$1.63 \pm 1.67e^{-02}$	$2.12 \pm 1.88e^{-02}$	$2.88 \pm 2.56e^{+00}$
			2	$8.69 \pm 12.20e^{-03}$	$1.61 \pm 1.58e^{-02}$	$2.10 \pm 1.78e^{-02}$	$2.85 \pm 2.53e^{+00}$
			3	$7.57 \pm 9.52e^{-03}$	$1.63 \pm 1.67e^{-02}$	$2.08 \pm 1.75e^{-02}$	$2.66 \pm 2.20e^{+00}$
			4	$8.25 \pm 14.40e^{-03}$	$1.58 \pm 1.59e^{-02}$	$2.12 \pm 2.00e^{-02}$	$2.74 \pm 2.92e^{+00}$
		15	1	$9.76 \pm 13.50e^{-03}$	$1.63 \pm 1.61e^{-02}$	$2.09 \pm 1.94e^{-02}$	$3.06 \pm 2.74e^{+00}$
			2	$8.76 \pm 11.60e^{-03}$	$1.68 \pm 1.72e^{-02}$	$2.13 \pm 1.86e^{-02}$	$2.92 \pm 2.47e^{+00}$
			3	$9.03 \pm 13.10e^{-03}$	$1.75 \pm 1.99e^{-02}$	$2.22 \pm 2.17e^{-02}$	$3.02 \pm 2.86e^{+00}$
			4	$8.87 \pm 13.40e^{-03}$	$1.64 \pm 1.74e^{-02}$	$2.18 \pm 2.04e^{-02}$	$2.91 \pm 2.82e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$9.06 \pm 13.90e^{-03}$	$1.59 \pm 1.77e^{-02}$	$1.96 \pm 2.11e^{-02}$	$2.90 \pm 2.84e^{+00}$
			2	$8.58 \pm 13.20e^{-03}$	$1.60 \pm 1.84e^{-02}$	$1.98 \pm 2.03e^{-02}$	$2.82 \pm 2.74e^{+00}$
			3	$6.97 \pm 7.37e^{-03}$	$1.47 \pm 1.56e^{-02}$	$1.87 \pm 1.65e^{-02}$	$2.43 \pm 1.80e^{+00}$
			4	$7.60 \pm 11.80e^{-03}$	$1.53 \pm 1.86e^{-02}$	$2.12 \pm 2.86e^{-02}$	$2.59 \pm 2.55e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$8.98 \pm 8.98e^{-03}$	$1.71 \pm 1.04e^{-02}$	$2.11 \pm 1.19e^{-02}$	$2.98 \pm 1.80e^{+00}$

TABLEAU A.2 – Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(S_3)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$1.18 \pm 1.26e^{-02}$	$1.21 \pm 1.06e^{-02}$	$1.63 \pm 0.87e^{-02}$	$2.72 \pm 2.67e^{+00}$
			2	$1.54 \pm 1.31e^{-02}$	$1.38 \pm 1.36e^{-02}$	$1.60 \pm 0.97e^{-02}$	$5.06 \pm 3.41e^{+00}$
			3	$9.17 \pm 11.10e^{-03}$	$1.26 \pm 1.20e^{-02}$	$1.70 \pm 0.59e^{-02}$	$3.80 \pm 3.17e^{+00}$
			4	$8.79 \pm 11.30e^{-03}$	$1.41 \pm 1.86e^{-02}$	$1.77 \pm 0.69e^{-02}$	$3.98 \pm 2.65e^{+00}$
		10	1	$1.57 \pm 1.36e^{-02}$	$1.18 \pm 1.23e^{-02}$	$1.63 \pm 0.97e^{-02}$	$3.26 \pm 2.46e^{+00}$
			2	$1.34 \pm 1.12e^{-02}$	$1.67 \pm 1.73e^{-02}$	$1.70 \pm 1.21e^{-02}$	$3.97 \pm 2.62e^{+00}$
			3	$9.54 \pm 12.60e^{-03}$	$1.42 \pm 1.70e^{-02}$	$1.75 \pm 0.96e^{-02}$	$3.02 \pm 3.03e^{+00}$
			4	$1.31 \pm 1.34e^{-02}$	$1.07 \pm 1.20e^{-02}$	$1.62 \pm 0.76e^{-02}$	$3.55 \pm 2.47e^{+00}$
		15	1	$1.61 \pm 1.35e^{-02}$	$1.04 \pm 1.17e^{-02}$	$1.56 \pm 1.09e^{-02}$	$3.81 \pm 2.74e^{+00}$
			2	$1.31 \pm 1.26e^{-02}$	$1.52 \pm 1.49e^{-02}$	$1.68 \pm 1.26e^{-02}$	$3.59 \pm 2.59e^{+00}$
			3	$1.13 \pm 1.51e^{-02}$	$1.35 \pm 1.58e^{-02}$	$1.66 \pm 1.12e^{-02}$	$3.15 \pm 3.28e^{+00}$
			4	$1.03 \pm 1.26e^{-02}$	$1.12 \pm 1.20e^{-02}$	$1.57 \pm 0.82e^{-02}$	$3.07 \pm 2.64e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$1.44 \pm 1.29e^{-02}$	$1.16 \pm 1.25e^{-02}$	$1.63 \pm 0.93e^{-02}$	$3.14 \pm 2.36e^{+00}$
			2	$1.57 \pm 1.11e^{-02}$	$1.61 \pm 1.85e^{-02}$	$1.67 \pm 1.04e^{-02}$	$4.00 \pm 2.36e^{+00}$
			3	$9.73 \pm 11.70e^{-03}$	$1.59 \pm 1.73e^{-02}$	$1.78 \pm 0.76e^{-02}$	$4.26 \pm 3.86e^{+00}$
			4	$1.10 \pm 1.27e^{-02}$	$1.35 \pm 1.58e^{-02}$	$1.75 \pm 0.67e^{-02}$	$4.62 \pm 2.61e^{+00}$
		10	1	$1.63 \pm 1.47e^{-02}$	$1.30 \pm 1.40e^{-02}$	$1.70 \pm 1.19e^{-02}$	$3.95 \pm 2.80e^{+00}$
			2	$1.59 \pm 1.53e^{-02}$	$1.77 \pm 1.81e^{-02}$	$1.79 \pm 1.30e^{-02}$	$4.17 \pm 2.77e^{+00}$
			3	$1.30 \pm 1.55e^{-02}$	$1.57 \pm 1.98e^{-02}$	$1.76 \pm 1.22e^{-02}$	$3.33 \pm 3.33e^{+00}$
			4	$1.38 \pm 1.84e^{-02}$	$1.31 \pm 1.48e^{-02}$	$1.66 \pm 0.97e^{-02}$	$2.97 \pm 2.60e^{+00}$
		15	1	$1.56 \pm 1.37e^{-02}$	$1.15 \pm 1.34e^{-02}$	$1.53 \pm 1.16e^{-02}$	$3.44 \pm 2.76e^{+00}$
			2	$1.51 \pm 1.54e^{-02}$	$1.69 \pm 1.93e^{-02}$	$1.78 \pm 1.53e^{-02}$	$4.30 \pm 3.73e^{+00}$
			3	$1.22 \pm 1.50e^{-02}$	$1.49 \pm 1.85e^{-02}$	$1.72 \pm 1.39e^{-02}$	$3.21 \pm 3.19e^{+00}$
			4	$1.29 \pm 1.76e^{-02}$	$1.35 \pm 1.47e^{-02}$	$1.64 \pm 1.03e^{-02}$	$2.54 \pm 2.10e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$1.19 \pm 1.23e^{-02}$	$1.19 \pm 1.07e^{-02}$	$1.62 \pm 0.82e^{-02}$	$2.53 \pm 2.32e^{+00}$
			2	$1.50 \pm 0.99e^{-02}$	$1.38 \pm 1.49e^{-02}$	$1.60 \pm 1.03e^{-02}$	$3.98 \pm 2.14e^{+00}$
			3	$9.13 \pm 11.20e^{-03}$	$1.53 \pm 1.94e^{-02}$	$1.82 \pm 1.16e^{-02}$	$1.30 \pm 0.56e^{+00}$
			4	$6.28 \pm 7.13e^{-03}$	$9.85 \pm 10.20e^{-03}$	$1.89 \pm 1.85e^{-02}$	$2.31 \pm 1.08e^{+00}$
		10	1	$1.55 \pm 1.33e^{-02}$	$1.13 \pm 1.15e^{-02}$	$1.58 \pm 1.00e^{-02}$	$3.60 \pm 2.58e^{+00}$
			2	$1.38 \pm 1.39e^{-02}$	$1.47 \pm 1.48e^{-02}$	$1.67 \pm 1.25e^{-02}$	$3.79 \pm 2.53e^{+00}$
			3	$1.11 \pm 1.59e^{-02}$	$1.34 \pm 1.57e^{-02}$	$1.77 \pm 1.43e^{-02}$	$2.85 \pm 3.07e^{+00}$
			4	$9.70 \pm 10.20e^{-03}$	$1.27 \pm 1.52e^{-02}$	$1.70 \pm 1.06e^{-02}$	$2.69 \pm 1.97e^{+00}$
		15	1	$1.53 \pm 1.20e^{-02}$	$1.02 \pm 1.18e^{-02}$	$1.50 \pm 1.05e^{-02}$	$3.36 \pm 2.43e^{+00}$
			2	$1.31 \pm 1.30e^{-02}$	$1.42 \pm 1.37e^{-02}$	$1.63 \pm 1.29e^{-02}$	$3.63 \pm 2.71e^{+00}$
			3	$1.15 \pm 1.36e^{-02}$	$1.15 \pm 1.22e^{-02}$	$1.62 \pm 1.08e^{-02}$	$3.19 \pm 2.72e^{+00}$
			4	$1.28 \pm 1.36e^{-02}$	$1.21 \pm 1.30e^{-02}$	$1.62 \pm 1.12e^{-02}$	$3.39 \pm 3.02e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$1.43 \pm 1.25e^{-02}$	$1.41 \pm 1.81e^{-02}$	$1.68 \pm 1.28e^{-02}$	$3.24 \pm 2.43e^{+00}$
			2	$1.62 \pm 1.23e^{-02}$	$2.14 \pm 2.26e^{-02}$	$1.76 \pm 1.17e^{-02}$	$3.99 \pm 2.72e^{+00}$
			3	$1.32 \pm 1.50e^{-02}$	$2.08 \pm 3.88e^{-02}$	$1.82 \pm 1.64e^{-02}$	$4.05 \pm 3.39e^{+00}$
			4	$1.47 \pm 2.09e^{-02}$	$1.79 \pm 2.16e^{-02}$	$1.84 \pm 0.98e^{-02}$	$5.72 \pm 5.74e^{+00}$
		10	1	$1.33 \pm 1.29e^{-02}$	$1.51 \pm 1.77e^{-02}$	$1.73 \pm 1.33e^{-02}$	$3.14 \pm 2.55e^{+00}$
			2	$1.66 \pm 1.36e^{-02}$	$1.79 \pm 1.88e^{-02}$	$1.78 \pm 1.37e^{-02}$	$3.96 \pm 2.43e^{+00}$
			3	$1.35 \pm 1.56e^{-02}$	$2.01 \pm 2.42e^{-02}$	$1.82 \pm 1.36e^{-02}$	$3.95 \pm 3.81e^{+00}$
			4	$1.89 \pm 3.07e^{-02}$	$1.45 \pm 1.73e^{-02}$	$1.84 \pm 1.44e^{-02}$	$4.31 \pm 3.46e^{+00}$
		15	1	$1.64 \pm 1.67e^{-02}$	$1.32 \pm 1.52e^{-02}$	$1.69 \pm 1.29e^{-02}$	$3.65 \pm 3.16e^{+00}$
			2	$1.67 \pm 1.52e^{-02}$	$1.63 \pm 1.78e^{-02}$	$1.79 \pm 1.39e^{-02}$	$4.30 \pm 3.22e^{+00}$
			3	$1.29 \pm 1.73e^{-02}$	$1.76 \pm 2.24e^{-02}$	$1.84 \pm 1.63e^{-02}$	$4.06 \pm 4.11e^{+00}$
			4	$1.41 \pm 1.95e^{-02}$	$1.40 \pm 1.88e^{-02}$	$1.73 \pm 1.42e^{-02}$	$4.40 \pm 5.20e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$1.76 \pm 2.54e^{-02}$	$1.04 \pm 1.54e^{-02}$	$1.57 \pm 1.78e^{-02}$	$4.08 \pm 5.07e^{+00}$
			2	$1.33 \pm 1.91e^{-02}$	$1.69 \pm 2.60e^{-02}$	$1.88 \pm 2.00e^{-02}$	$3.43 \pm 4.18e^{+00}$
			3	$7.82 \pm 13.70e^{-03}$	$1.23 \pm 1.75e^{-02}$	$1.66 \pm 1.38e^{-02}$	$2.53 \pm 3.19e^{+00}$
			4	$9.69 \pm 15.30e^{-03}$	$1.16 \pm 1.58e^{-02}$	$1.72 \pm 1.55e^{-02}$	$2.81 \pm 2.99e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.70 \pm 0.72e^{-02}$	$1.43 \pm 1.21e^{-02}$	$1.47 \pm 1.22e^{-02}$	$4.24 \pm 1.54e^{+00}$

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(S_3)$	$Err'(\mathbb{S})$
30	K-means	5	1	$2.27 \pm 2.11e^{-02}$	$1.73 \pm 2.00e^{-02}$	$1.89 \pm 1.22e^{-02}$	$4.75 \pm 4.44e^{+00}$
			2	$2.33 \pm 1.69e^{-02}$	$2.19 \pm 2.25e^{-02}$	$1.89 \pm 1.26e^{-02}$	$7.31 \pm 4.13e^{+00}$
			3	$1.89 \pm 2.15e^{-02}$	$2.82 \pm 3.08e^{-02}$	$1.95 \pm 1.32e^{-02}$	$7.61 \pm 7.93e^{+00}$
			4	$2.20 \pm 3.59e^{-02}$	$2.06 \pm 2.40e^{-02}$	$1.88 \pm 1.12e^{-02}$	$8.39 \pm 3.02e^{+00}$
		10	1	$2.75 \pm 2.09e^{-02}$	$1.83 \pm 2.11e^{-02}$	$1.95 \pm 1.51e^{-02}$	$5.31 \pm 4.32e^{+00}$
			2	$2.20 \pm 1.75e^{-02}$	$2.38 \pm 2.42e^{-02}$	$2.02 \pm 1.56e^{-02}$	$6.51 \pm 3.67e^{+00}$
			3	$1.94 \pm 2.42e^{-02}$	$2.16 \pm 2.45e^{-02}$	$2.01 \pm 1.70e^{-02}$	$5.72 \pm 5.42e^{+00}$
			4	$1.68 \pm 1.79e^{-02}$	$1.66 \pm 2.34e^{-02}$	$1.81 \pm 1.33e^{-02}$	$5.30 \pm 5.38e^{+00}$
		15	1	$3.15 \pm 2.26e^{-02}$	$1.79 \pm 1.99e^{-02}$	$1.93 \pm 1.54e^{-02}$	$6.76 \pm 4.61e^{+00}$
			2	$2.57 \pm 2.06e^{-02}$	$2.29 \pm 2.37e^{-02}$	$2.04 \pm 1.72e^{-02}$	$5.70 \pm 3.74e^{+00}$
			3	$2.39 \pm 2.67e^{-02}$	$2.11 \pm 2.50e^{-02}$	$2.03 \pm 1.85e^{-02}$	$5.57 \pm 5.01e^{+00}$
			4	$2.27 \pm 2.53e^{-02}$	$1.97 \pm 2.54e^{-02}$	$1.97 \pm 1.93e^{-02}$	$6.67 \pm 7.04e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$2.31 \pm 2.18e^{-02}$	$2.07 \pm 2.25e^{-02}$	$1.99 \pm 1.49e^{-02}$	$5.39 \pm 5.00e^{+00}$
			2	$2.89 \pm 2.24e^{-02}$	$2.90 \pm 3.07e^{-02}$	$2.12 \pm 1.72e^{-02}$	$8.63 \pm 4.53e^{+00}$
			3	$2.08 \pm 2.56e^{-02}$	$2.87 \pm 3.49e^{-02}$	$2.00 \pm 1.59e^{-02}$	$5.53 \pm 4.42e^{+00}$
			4	$2.53 \pm 3.90e^{-02}$	$2.61 \pm 3.29e^{-02}$	$1.97 \pm 1.39e^{-02}$	$1.17 \pm 0.53e^{+01}$
		10	1	$2.74 \pm 2.29e^{-02}$	$2.04 \pm 2.25e^{-02}$	$2.01 \pm 1.68e^{-02}$	$6.10 \pm 4.66e^{+00}$
			2	$2.67 \pm 2.26e^{-02}$	$2.38 \pm 2.56e^{-02}$	$2.09 \pm 1.69e^{-02}$	$7.26 \pm 4.76e^{+00}$
			3	$2.44 \pm 2.52e^{-02}$	$2.54 \pm 3.34e^{-02}$	$2.17 \pm 2.24e^{-02}$	$6.51 \pm 6.26e^{+00}$
			4	$2.72 \pm 2.83e^{-02}$	$2.71 \pm 3.39e^{-02}$	$2.22 \pm 2.10e^{-02}$	$5.89 \pm 4.55e^{+00}$
		15	1	$2.90 \pm 2.18e^{-02}$	$1.98 \pm 2.03e^{-02}$	$1.96 \pm 1.64e^{-02}$	$7.15 \pm 4.72e^{+00}$
			2	$2.53 \pm 2.27e^{-02}$	$2.43 \pm 2.50e^{-02}$	$2.11 \pm 1.79e^{-02}$	$6.41 \pm 4.09e^{+00}$
			3	$2.45 \pm 2.46e^{-02}$	$2.25 \pm 2.74e^{-02}$	$2.13 \pm 1.92e^{-02}$	$5.76 \pm 3.82e^{+00}$
			4	$2.53 \pm 3.11e^{-02}$	$2.20 \pm 2.95e^{-02}$	$2.09 \pm 2.17e^{-02}$	$6.10 \pm 7.01e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$2.06 \pm 2.03e^{-02}$	$2.00 \pm 2.24e^{-02}$	$1.96 \pm 1.44e^{-02}$	$4.61 \pm 4.79e^{+00}$
			2	$2.63 \pm 1.75e^{-02}$	$2.29 \pm 2.22e^{-02}$	$1.98 \pm 1.34e^{-02}$	$6.75 \pm 3.36e^{+00}$
			3	$1.81 \pm 2.05e^{-02}$	$2.37 \pm 2.88e^{-02}$	$1.95 \pm 1.33e^{-02}$	$8.90 \pm 6.57e^{+00}$
			4	$1.79 \pm 1.71e^{-02}$	$1.62 \pm 2.27e^{-02}$	$1.85 \pm 1.19e^{-02}$	$9.95 \pm 4.02e^{+00}$
		10	1	$2.75 \pm 2.07e^{-02}$	$1.63 \pm 2.01e^{-02}$	$1.91 \pm 1.54e^{-02}$	$6.23 \pm 4.12e^{+00}$
			2	$2.45 \pm 2.02e^{-02}$	$2.21 \pm 2.39e^{-02}$	$2.03 \pm 1.71e^{-02}$	$7.04 \pm 3.81e^{+00}$
			3	$1.86 \pm 2.31e^{-02}$	$1.93 \pm 2.64e^{-02}$	$1.94 \pm 1.68e^{-02}$	$5.03 \pm 5.64e^{+00}$
			4	$2.97 \pm 3.30e^{-02}$	$1.72 \pm 2.26e^{-02}$	$1.93 \pm 1.58e^{-02}$	$7.09 \pm 6.11e^{+00}$
		15	1	$2.91 \pm 2.07e^{-02}$	$1.92 \pm 1.88e^{-02}$	$1.97 \pm 1.58e^{-02}$	$6.45 \pm 4.26e^{+00}$
			2	$2.69 \pm 2.16e^{-02}$	$2.39 \pm 2.50e^{-02}$	$2.12 \pm 1.77e^{-02}$	$6.75 \pm 4.04e^{+00}$
			3	$2.16 \pm 2.49e^{-02}$	$2.03 \pm 2.56e^{-02}$	$2.03 \pm 1.93e^{-02}$	$5.45 \pm 5.19e^{+00}$
			4	$2.44 \pm 2.59e^{-02}$	$2.17 \pm 2.78e^{-02}$	$2.09 \pm 2.10e^{-02}$	$7.33 \pm 5.61e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$2.28 \pm 2.10e^{-02}$	$2.48 \pm 2.71e^{-02}$	$2.15 \pm 1.75e^{-02}$	$4.93 \pm 4.34e^{+00}$
			2	$2.64 \pm 1.74e^{-02}$	$3.26 \pm 2.63e^{-02}$	$2.08 \pm 1.47e^{-02}$	$6.99 \pm 3.63e^{+00}$
			3	$2.68 \pm 2.77e^{-02}$	$4.16 \pm 5.21e^{-02}$	$2.17 \pm 2.15e^{-02}$	$7.72 \pm 5.69e^{+00}$
			4	$3.60 \pm 4.14e^{-02}$	$2.68 \pm 3.00e^{-02}$	$2.08 \pm 1.85e^{-02}$	$1.16 \pm 1.32e^{+01}$
		10	1	$2.65 \pm 2.44e^{-02}$	$2.33 \pm 2.73e^{-02}$	$2.12 \pm 1.88e^{-02}$	$7.34 \pm 5.76e^{+00}$
			2	$2.77 \pm 2.51e^{-02}$	$2.61 \pm 2.91e^{-02}$	$2.10 \pm 1.78e^{-02}$	$7.13 \pm 5.03e^{+00}$
			3	$1.97 \pm 2.17e^{-02}$	$2.92 \pm 3.28e^{-02}$	$2.08 \pm 1.75e^{-02}$	$6.22 \pm 5.05e^{+00}$
			4	$3.01 \pm 3.70e^{-02}$	$2.44 \pm 2.93e^{-02}$	$2.12 \pm 2.00e^{-02}$	$6.83 \pm 5.71e^{+00}$
		15	1	$2.91 \pm 2.39e^{-02}$	$2.33 \pm 2.62e^{-02}$	$2.09 \pm 1.94e^{-02}$	$8.04 \pm 4.85e^{+00}$
			2	$2.68 \pm 2.28e^{-02}$	$2.53 \pm 2.84e^{-02}$	$2.13 \pm 1.86e^{-02}$	$6.92 \pm 3.88e^{+00}$
			3	$2.64 \pm 2.59e^{-02}$	$2.84 \pm 3.35e^{-02}$	$2.22 \pm 2.17e^{-02}$	$6.72 \pm 5.69e^{+00}$
			4	$2.74 \pm 2.79e^{-02}$	$2.31 \pm 2.79e^{-02}$	$2.18 \pm 2.04e^{-02}$	$7.34 \pm 5.65e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$2.71 \pm 2.84e^{-02}$	$2.06 \pm 2.73e^{-02}$	$1.96 \pm 2.11e^{-02}$	$6.63 \pm 5.92e^{+00}$
			2	$2.32 \pm 2.76e^{-02}$	$2.22 \pm 3.01e^{-02}$	$1.98 \pm 2.03e^{-02}$	$5.57 \pm 6.50e^{+00}$
			3	$1.40 \pm 1.64e^{-02}$	$1.88 \pm 2.64e^{-02}$	$1.87 \pm 1.65e^{-02}$	$3.67 \pm 3.39e^{+00}$
			4	$1.98 \pm 2.83e^{-02}$	$2.09 \pm 3.21e^{-02}$	$2.12 \pm 2.86e^{-02}$	$5.21 \pm 4.96e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$2.99 \pm 0.82e^{-02}$	$2.67 \pm 1.44e^{-02}$	$2.11 \pm 1.19e^{-02}$	$7.28 \pm 1.47e^{+00}$

TABLEAU A.3 – Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

A.2 Jeu de paramètres n° 1

N	méthode	k	m	$\overline{B}(\mathcal{S}_1)$	$\overline{B}(\mathcal{S}_2)$	$\overline{B}(\mathcal{S}_3)$	$\overline{B}_3(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	1.000	0.020	0.331	0.006
			2	1.000	0.014	0.181	0.000
			3	1.000	0.010	0.433	0.001
			4	1.000	0.006	0.047	0.000
		10	1	1.000	0.012	0.412	0.006
			2	1.000	0.046	0.436	0.013
			3	1.000	0.022	0.496	0.012
			4	1.000	0.019	0.162	0.001
		15	1	1.000	0.022	0.411	0.010
			2	1.000	0.040	0.436	0.019
			3	1.000	0.021	0.538	0.012
			4	1.000	0.022	0.357	0.005
	K-medoids	5	1	1.000	0.008	0.329	0.003
			2	1.000	0.012	0.087	0.000
			3	1.000	0.006	0.208	0.000
			4	1.000	0.012	0.115	0.000
		10	1	1.000	0.009	0.362	0.002
			2	1.000	0.028	0.245	0.007
			3	1.000	0.012	0.350	0.004
			4	1.000	0.041	0.227	0.005
		15	1	1.000	0.018	0.396	0.010
			2	1.000	0.044	0.311	0.018
			3	1.000	0.026	0.398	0.010
			4	1.000	0.083	0.479	0.021
	agglomerative	5	1	1.000	0.014	0.333	0.004
			2	1.000	0.013	0.173	0.000
			3	1.000	0.010	0.429	0.001
			4	1.000	0.013	0.037	0.000
		10	1	1.000	0.031	0.394	0.016
			2	1.000	0.045	0.422	0.014
			3	1.000	0.024	0.511	0.012
			4	1.000	0.015	0.159	0.004
		15	1	1.000	0.027	0.379	0.007
			2	1.000	0.068	0.394	0.024
			3	1.000	0.019	0.506	0.011
			4	1.000	0.023	0.349	0.007
	ts-K-means	5	1	1.000	0.009	0.375	0.003
			2	1.000	0.005	0.023	0.000
			3	1.000	0.015	0.031	0.000
			4	1.000	0.004	0.039	0.000
		10	1	1.000	0.017	0.404	0.006
			2	1.000	0.016	0.109	0.001
			3	1.000	0.022	0.270	0.004
			4	1.000	0.016	0.131	0.001
		15	1	1.000	0.019	0.404	0.003
			2	1.000	0.024	0.189	0.004
			3	1.000	0.035	0.429	0.019
			4	1.000	0.018	0.206	0.000
	DBSCAN	$\emptyset$	1	1.000	0.017	0.380	0.006
			2	1.000	0.043	0.550	0.012
			3	1.000	0.036	0.427	0.016
			4	1.000	0.023	0.758	0.005
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	1.000	0.031	0.156	0.005

TABLEAU A.4 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err(S_1)$	$Err(S_2)$	$Err(S_3)$	$Err(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$8.09 \pm 8.37e^{-03}$	$1.02 \pm 3.68e^{-03}$	$6.07 \pm 7.24e^{-03}$	$3.51 \pm 7.16e^{+00}$
			2	$5.34 \pm 1.89e^{-03}$	$6.33 \pm 9.11e^{-04}$	$3.58 \pm 0.92e^{-03}$	$2.13 \pm 1.72e^{+00}$
			3	$7.02 \pm 6.53e^{-03}$	$7.20 \pm 22.00e^{-04}$	$5.48 \pm 6.36e^{-03}$	$2.79 \pm 4.40e^{+00}$
			4	$5.86 \pm 1.62e^{-03}$	$6.34 \pm 16.80e^{-04}$	$3.75 \pm 0.64e^{-03}$	$2.17 \pm 3.13e^{+00}$
		10	1	$7.17 \pm 7.11e^{-03}$	$7.47 \pm 19.80e^{-04}$	$5.37 \pm 6.11e^{-03}$	$2.82 \pm 4.03e^{+00}$
			2	$5.05 \pm 3.51e^{-03}$	$8.15 \pm 16.10e^{-04}$	$3.55 \pm 2.85e^{-03}$	$2.46 \pm 3.11e^{+00}$
			3	$6.88 \pm 6.89e^{-03}$	$9.31 \pm 29.90e^{-04}$	$5.01 \pm 5.98e^{-03}$	$3.06 \pm 5.75e^{+00}$
			4	$6.18 \pm 4.55e^{-03}$	$9.50 \pm 35.70e^{-04}$	$3.95 \pm 3.38e^{-03}$	$2.82 \pm 6.71e^{+00}$
		15	1	$7.06 \pm 6.71e^{-03}$	$9.66 \pm 28.90e^{-04}$	$5.51 \pm 5.30e^{-03}$	$3.26 \pm 5.63e^{+00}$
			2	$5.89 \pm 4.95e^{-03}$	$8.20 \pm 15.70e^{-04}$	$4.53 \pm 4.38e^{-03}$	$2.73 \pm 3.15e^{+00}$
			3	$6.54 \pm 6.77e^{-03}$	$8.50 \pm 25.70e^{-04}$	$4.91 \pm 6.04e^{-03}$	$2.89 \pm 5.00e^{+00}$
			4	$6.00 \pm 5.76e^{-03}$	$9.20 \pm 32.50e^{-04}$	$4.05 \pm 4.70e^{-03}$	$2.79 \pm 6.18e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$7.30 \pm 6.80e^{-03}$	$7.27 \pm 22.70e^{-04}$	$5.74 \pm 6.46e^{-03}$	$2.88 \pm 4.61e^{+00}$
			2	$5.93 \pm 5.13e^{-03}$	$6.07 \pm 8.65e^{-04}$	$4.01 \pm 5.10e^{-03}$	$2.19 \pm 2.10e^{+00}$
			3	$6.45 \pm 4.87e^{-03}$	$6.97 \pm 27.20e^{-04}$	$4.52 \pm 4.15e^{-03}$	$2.49 \pm 5.18e^{+00}$
			4	$6.02 \pm 3.61e^{-03}$	$9.05 \pm 40.30e^{-04}$	$3.79 \pm 1.41e^{-03}$	$2.69 \pm 7.54e^{+00}$
		10	1	$7.19 \pm 6.56e^{-03}$	$7.88 \pm 28.00e^{-04}$	$5.36 \pm 5.71e^{-03}$	$2.89 \pm 5.41e^{+00}$
			2	$5.82 \pm 3.37e^{-03}$	$7.12 \pm 12.10e^{-04}$	$4.03 \pm 3.02e^{-03}$	$2.40 \pm 2.38e^{+00}$
			3	$6.41 \pm 4.95e^{-03}$	$8.23 \pm 29.10e^{-04}$	$4.52 \pm 4.36e^{-03}$	$2.73 \pm 5.51e^{+00}$
			4	$7.04 \pm 7.05e^{-03}$	$1.32 \pm 5.32e^{-03}$	$4.48 \pm 5.06e^{-03}$	$3.65 \pm 10.00e^{+00}$
		15	1	$7.19 \pm 7.01e^{-03}$	$8.79 \pm 25.20e^{-04}$	$5.59 \pm 5.37e^{-03}$	$3.12 \pm 4.89e^{+00}$
			2	$6.29 \pm 5.42e^{-03}$	$8.66 \pm 17.60e^{-04}$	$4.57 \pm 4.27e^{-03}$	$2.82 \pm 3.49e^{+00}$
			3	$6.64 \pm 5.97e^{-03}$	$1.06 \pm 3.97e^{-03}$	$4.64 \pm 4.81e^{-03}$	$3.21 \pm 7.50e^{+00}$
			4	$8.26 \pm 13.70e^{-03}$	$1.63 \pm 4.13e^{-03}$	$6.29 \pm 13.10e^{-03}$	$4.70 \pm 8.28e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$7.81 \pm 7.26e^{-03}$	$9.53 \pm 37.20e^{-04}$	$5.91 \pm 6.52e^{-03}$	$3.34 \pm 7.13e^{+00}$
			2	$5.41 \pm 2.11e^{-03}$	$5.90 \pm 6.21e^{-04}$	$3.57 \pm 1.33e^{-03}$	$2.04 \pm 1.22e^{+00}$
			3	$7.38 \pm 7.20e^{-03}$	$7.99 \pm 29.80e^{-04}$	$5.61 \pm 6.66e^{-03}$	$2.98 \pm 5.80e^{+00}$
			4	$4.48 \pm 4.64e^{-01}$	$8.96 \pm 38.40e^{-04}$	$3.77 \pm 0.36e^{-03}$	$3.11 \pm 7.14e^{+00}$
		10	1	$7.46 \pm 7.13e^{-03}$	$1.09 \pm 3.18e^{-03}$	$5.42 \pm 5.80e^{-03}$	$3.48 \pm 6.29e^{+00}$
			2	$5.24 \pm 4.18e^{-03}$	$8.45 \pm 18.00e^{-04}$	$3.63 \pm 3.16e^{-03}$	$2.54 \pm 3.45e^{+00}$
			3	$6.59 \pm 6.86e^{-03}$	$9.31 \pm 32.10e^{-04}$	$4.91 \pm 5.68e^{-03}$	$3.03 \pm 6.27e^{+00}$
			4	$4.18 \pm 4.50e^{-01}$	$7.91 \pm 26.70e^{-04}$	$3.84 \pm 2.44e^{-03}$	$2.91 \pm 5.01e^{+00}$
		15	1	$1.13 \pm 5.53e^{-02}$	$1.01 \pm 3.05e^{-03}$	$5.35 \pm 5.08e^{-03}$	$3.31 \pm 5.81e^{+00}$
			2	$5.86 \pm 4.83e^{-03}$	$1.09 \pm 2.43e^{-03}$	$4.48 \pm 3.97e^{-03}$	$3.23 \pm 4.62e^{+00}$
			3	$6.59 \pm 6.16e^{-03}$	$8.61 \pm 29.20e^{-04}$	$4.91 \pm 5.19e^{-03}$	$2.91 \pm 5.57e^{+00}$
			4	$5.95 \pm 4.14e^{-01}$	$9.27 \pm 29.10e^{-04}$	$3.84 \pm 3.07e^{-03}$	$3.34 \pm 5.47e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$7.39 \pm 7.09e^{-03}$	$7.46 \pm 23.40e^{-04}$	$5.59 \pm 5.99e^{-03}$	$2.87 \pm 4.68e^{+00}$
			2	$6.86 \pm 9.55e^{-03}$	$6.29 \pm 13.60e^{-04}$	$4.63 \pm 9.60e^{-03}$	$2.40 \pm 3.58e^{+00}$
			3	$6.52 \pm 8.10e^{-03}$	$9.24 \pm 32.60e^{-04}$	$3.79 \pm 0.81e^{-03}$	$2.73 \pm 6.09e^{+00}$
			4	$7.10 \pm 12.20e^{-03}$	$6.15 \pm 16.40e^{-04}$	$4.66 \pm 10.10e^{-03}$	$2.38 \pm 4.05e^{+00}$
		10	1	$7.35 \pm 6.95e^{-03}$	$8.70 \pm 27.60e^{-04}$	$5.47 \pm 5.68e^{-03}$	$3.07 \pm 5.39e^{+00}$
			2	$7.32 \pm 9.20e^{-03}$	$6.91 \pm 14.50e^{-04}$	$4.80 \pm 6.23e^{-03}$	$2.56 \pm 3.15e^{+00}$
			3	$6.67 \pm 6.89e^{-03}$	$9.00 \pm 29.40e^{-04}$	$4.42 \pm 4.27e^{-03}$	$2.85 \pm 5.59e^{+00}$
			4	$7.04 \pm 8.17e^{-03}$	$8.37 \pm 30.30e^{-04}$	$4.80 \pm 7.69e^{-03}$	$2.83 \pm 5.98e^{+00}$
		15	1	$7.36 \pm 7.23e^{-03}$	$9.36 \pm 29.90e^{-04}$	$5.62 \pm 5.68e^{-03}$	$3.23 \pm 5.78e^{+00}$
			2	$7.05 \pm 7.33e^{-03}$	$8.14 \pm 23.10e^{-04}$	$4.99 \pm 7.15e^{-03}$	$2.84 \pm 4.66e^{+00}$
			3	$6.66 \pm 5.98e^{-03}$	$1.11 \pm 3.58e^{-03}$	$4.69 \pm 4.77e^{-03}$	$3.31 \pm 6.77e^{+00}$
			4	$7.60 \pm 10.00e^{-03}$	$8.65 \pm 33.90e^{-04}$	$5.21 \pm 8.78e^{-03}$	$2.99 \pm 6.71e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$8.05 \pm 9.93e^{-03}$	$8.41 \pm 23.80e^{-04}$	$6.24 \pm 9.37e^{-03}$	$3.22 \pm 5.09e^{+00}$
			2	$7.29 \pm 17.00e^{-03}$	$7.32 \pm 11.80e^{-04}$	$4.15 \pm 6.46e^{-03}$	$2.47 \pm 2.77e^{+00}$
			3	$9.73 \pm 15.70e^{-03}$	$9.55 \pm 35.60e^{-04}$	$7.52 \pm 13.60e^{-03}$	$3.77 \pm 7.53e^{+00}$
			4	$1.30 \pm 2.94e^{-02}$	$8.88 \pm 42.20e^{-04}$	$4.31 \pm 6.50e^{-03}$	$2.80 \pm 8.04e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$8.74 \pm 6.21e^{-03}$	$1.12 \pm 3.28e^{-03}$	$5.97 \pm 5.55e^{-03}$	$3.68 \pm 6.32e^{+00}$

TABLEAU A.5 – Résultats issus du jeu de paramètres n°1 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(S_3)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$8.09 \pm 8.37e^{-03}$	$2.49 \pm 0.99e^{-02}$	$1.07 \pm 1.13e^{-02}$	$5.26 \pm 1.71e^{+01}$
			2	$5.34 \pm 1.89e^{-03}$	$7.46 \pm 3.46e^{-03}$	$2.57 \pm 1.84e^{-03}$	nan
			3	$7.02 \pm 6.53e^{-03}$	$1.89 \pm 1.22e^{-02}$	$7.68 \pm 9.22e^{-03}$	$1.16 \pm 0.00e^{+01}$
			4	$5.86 \pm 1.62e^{-03}$	$1.69 \pm 1.42e^{-02}$	$2.64 \pm 2.75e^{-03}$	nan
		10	1	$7.17 \pm 7.11e^{-03}$	$1.81 \pm 0.44e^{-02}$	$7.62 \pm 9.06e^{-03}$	$3.32 \pm 1.16e^{+01}$
			2	$5.05 \pm 3.51e^{-03}$	$6.61 \pm 4.59e^{-03}$	$3.23 \pm 4.29e^{-03}$	$1.11 \pm 0.94e^{+01}$
			3	$6.88 \pm 6.89e^{-03}$	$1.85 \pm 0.95e^{-02}$	$6.24 \pm 8.31e^{-03}$	$2.95 \pm 1.67e^{+01}$
			4	$6.18 \pm 4.55e^{-03}$	$2.23 \pm 1.43e^{-02}$	$4.71 \pm 8.35e^{-03}$	$6.67 \pm 0.00e^{+01}$
		15	1	$7.06 \pm 6.71e^{-03}$	$2.01 \pm 0.28e^{-02}$	$7.96 \pm 7.62e^{-03}$	$4.16 \pm 0.71e^{+01}$
			2	$5.89 \pm 4.95e^{-03}$	$7.63 \pm 3.61e^{-03}$	$5.48 \pm 6.52e^{-03}$	$1.57 \pm 0.64e^{+01}$
			3	$6.54 \pm 6.77e^{-03}$	$1.55 \pm 0.97e^{-02}$	$5.87 \pm 8.12e^{-03}$	$3.15 \pm 1.53e^{+01}$
			4	$6.00 \pm 5.76e^{-03}$	$1.80 \pm 1.35e^{-02}$	$4.51 \pm 7.85e^{-03}$	$4.29 \pm 1.56e^{+01}$
	K-medoids	5	1	$7.30 \pm 6.80e^{-03}$	$2.45 \pm 0.87e^{-02}$	$9.71 \pm 10.20e^{-03}$	$4.11 \pm 0.20e^{+01}$
			2	$5.93 \pm 5.13e^{-03}$	$6.46 \pm 5.26e^{-03}$	$6.19 \pm 17.10e^{-03}$	nan
			3	$6.45 \pm 4.87e^{-03}$	$2.68 \pm 2.29e^{-02}$	$7.24 \pm 8.58e^{-03}$	nan
			4	$6.02 \pm 3.61e^{-03}$	$3.05 \pm 2.09e^{-02}$	$3.72 \pm 4.17e^{-03}$	nan
		10	1	$7.19 \pm 6.56e^{-03}$	$2.75 \pm 1.10e^{-02}$	$8.11 \pm 8.83e^{-03}$	$5.66 \pm 1.81e^{+01}$
			2	$5.82 \pm 3.37e^{-03}$	$6.84 \pm 3.72e^{-03}$	$4.76 \pm 6.04e^{-03}$	$1.31 \pm 0.88e^{+01}$
			3	$6.41 \pm 4.95e^{-03}$	$2.41 \pm 1.20e^{-02}$	$5.87 \pm 7.17e^{-03}$	$3.86 \pm 1.42e^{+01}$
			4	$7.04 \pm 7.05e^{-03}$	$1.96 \pm 1.84e^{-02}$	$6.80 \pm 10.30e^{-03}$	$1.58 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$7.19 \pm 7.01e^{-03}$	$1.95 \pm 0.00e^{-02}$	$8.31 \pm 7.79e^{-03}$	$3.77 \pm 0.10e^{+01}$
			2	$6.29 \pm 5.42e^{-03}$	$8.03 \pm 4.10e^{-03}$	$6.27 \pm 7.38e^{-03}$	$1.46 \pm 0.71e^{+01}$
			3	$6.64 \pm 5.97e^{-03}$	$2.12 \pm 1.42e^{-02}$	$5.92 \pm 7.45e^{-03}$	$3.52 \pm 2.13e^{+01}$
			4	$8.26 \pm 13.70e^{-03}$	$1.36 \pm 0.69e^{-02}$	$8.99 \pm 18.50e^{-03}$	$1.18 \pm 0.00e^{+01}$
	agglomerative	5	1	$7.81 \pm 7.26e^{-03}$	$3.03 \pm 1.07e^{-02}$	$1.01 \pm 1.00e^{-02}$	$7.54 \pm 0.12e^{+01}$
			2	$5.41 \pm 2.11e^{-03}$	$4.69 \pm 3.56e^{-03}$	$2.45 \pm 2.96e^{-03}$	nan
			3	$7.38 \pm 7.20e^{-03}$	$2.69 \pm 1.43e^{-02}$	$8.02 \pm 9.65e^{-03}$	$5.97 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$4.48 \pm 4.64e^{-01}$	$2.82 \pm 1.94e^{-02}$	$2.87 \pm 1.62e^{-03}$	nan
		10	1	$7.46 \pm 7.13e^{-03}$	$1.86 \pm 0.35e^{-02}$	$7.91 \pm 8.66e^{-03}$	$3.86 \pm 0.64e^{+01}$
			2	$5.24 \pm 4.18e^{-03}$	$7.41 \pm 5.16e^{-03}$	$3.41 \pm 4.85e^{-03}$	$1.05 \pm 1.08e^{+01}$
			3	$6.59 \pm 6.86e^{-03}$	$1.70 \pm 1.29e^{-02}$	$5.97 \pm 7.80e^{-03}$	$3.19 \pm 2.65e^{+01}$
			4	$4.18 \pm 4.50e^{-01}$	$1.75 \pm 1.38e^{-02}$	$4.05 \pm 6.12e^{-03}$	$1.02 \pm 0.71e^{+01}$
		15	1	$1.13 \pm 5.53e^{-02}$	$1.82 \pm 0.64e^{-02}$	$7.88 \pm 7.61e^{-03}$	$3.44 \pm 0.92e^{+01}$
			2	$5.86 \pm 4.83e^{-03}$	$8.73 \pm 4.95e^{-03}$	$5.54 \pm 6.18e^{-03}$	$1.63 \pm 0.72e^{+01}$
			3	$6.59 \pm 6.16e^{-03}$	$1.77 \pm 1.27e^{-02}$	$5.99 \pm 7.13e^{-03}$	$3.77 \pm 2.92e^{+01}$
			4	$5.95 \pm 4.14e^{-01}$	$1.75 \pm 0.93e^{-02}$	$3.92 \pm 5.19e^{-03}$	$3.75 \pm 1.26e^{+01}$
	ts-K-means	5	1	$7.39 \pm 7.09e^{-03}$	$2.39 \pm 0.83e^{-02}$	$8.56 \pm 9.03e^{-03}$	$5.16 \pm 1.83e^{+01}$
			2	$6.86 \pm 9.55e^{-03}$	$1.91 \pm 0.53e^{-02}$	$3.99 \pm 5.23e^{-02}$	nan
			3	$6.52 \pm 8.10e^{-03}$	$2.64 \pm 0.70e^{-02}$	$3.56 \pm 4.57e^{-03}$	nan
			4	$7.10 \pm 12.20e^{-03}$	$2.03 \pm 1.69e^{-02}$	$2.58 \pm 4.62e^{-02}$	nan
		10	1	$7.35 \pm 6.95e^{-03}$	$2.02 \pm 0.84e^{-02}$	$7.92 \pm 8.36e^{-03}$	$4.51 \pm 1.44e^{+01}$
			2	$7.32 \pm 9.20e^{-03}$	$1.02 \pm 0.63e^{-02}$	$1.30 \pm 1.68e^{-02}$	$9.69 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$6.67 \pm 6.89e^{-03}$	$1.71 \pm 1.12e^{-02}$	$6.08 \pm 7.98e^{-03}$	$2.40 \pm 1.60e^{+01}$
			4	$7.04 \pm 8.17e^{-03}$	$1.93 \pm 1.50e^{-02}$	$1.14 \pm 2.00e^{-02}$	$4.07 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$7.36 \pm 7.23e^{-03}$	$2.16 \pm 0.61e^{-02}$	$8.31 \pm 8.24e^{-03}$	$4.03 \pm 0.15e^{+01}$
			2	$7.05 \pm 7.33e^{-03}$	$1.21 \pm 0.95e^{-02}$	$1.01 \pm 1.54e^{-02}$	$1.41 \pm 1.07e^{+01}$
			3	$6.66 \pm 5.98e^{-03}$	$1.70 \pm 1.03e^{-02}$	$5.87 \pm 7.11e^{-03}$	$2.67 \pm 1.24e^{+01}$
			4	$7.60 \pm 10.00e^{-03}$	$1.88 \pm 1.76e^{-02}$	$1.07 \pm 1.84e^{-02}$	nan
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$8.05 \pm 9.93e^{-03}$	$1.85 \pm 0.40e^{-02}$	$1.02 \pm 1.43e^{-02}$	$3.39 \pm 1.36e^{+01}$
			2	$7.29 \pm 17.00e^{-03}$	$5.10 \pm 3.55e^{-03}$	$4.43 \pm 8.70e^{-03}$	$7.36 \pm 4.41e^{+00}$
			3	$9.73 \pm 15.70e^{-03}$	$1.22 \pm 1.49e^{-02}$	$1.25 \pm 1.98e^{-02}$	$2.42 \pm 3.07e^{+01}$
			4	$1.30 \pm 2.94e^{-02}$	$1.58 \pm 2.33e^{-02}$	$4.47 \pm 7.46e^{-03}$	$1.11 \pm 0.29e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$8.74 \pm 6.21e^{-03}$	$1.95 \pm 0.00e^{-02}$	$1.77 \pm 0.58e^{-02}$	$4.17 \pm 0.21e^{+01}$

TABLEAU A.6 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

A.3 Jeu de paramètres n° 2

N	méthode	k	m	$\bar{B}(\mathcal{S}_1)$	$\bar{B}(\mathcal{S}_2)$	$\bar{B}(\mathcal{S}_3)$	$\bar{B}_3(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	1.000	0.851	1.000	0.851
			2	0.970	0.450	1.000	0.423
			3	0.933	0.347	1.000	0.289
			4	0.858	0.109	1.000	0.083
		10	1	1.000	0.880	1.000	0.880
			2	1.000	0.568	1.000	0.568
			3	0.998	0.452	1.000	0.450
			4	0.996	0.423	1.000	0.420
		15	1	1.000	0.872	1.000	0.872
			2	1.000	0.603	1.000	0.603
			3	1.000	0.638	1.000	0.638
			4	1.000	0.603	1.000	0.603
	K-medoids	5	1	0.999	0.828	1.000	0.827
			2	0.964	0.399	1.000	0.373
			3	0.969	0.213	1.000	0.201
			4	0.859	0.129	1.000	0.099
		10	1	1.000	0.854	1.000	0.854
			2	0.994	0.507	1.000	0.502
			3	0.997	0.482	1.000	0.479
			4	0.997	0.442	1.000	0.439
		15	1	1.000	0.847	1.000	0.847
			2	1.000	0.605	1.000	0.605
			3	0.999	0.652	1.000	0.652
			4	1.000	0.561	1.000	0.561
	agglomerative	5	1	1.000	0.868	1.000	0.868
			2	0.959	0.455	1.000	0.422
			3	0.929	0.359	1.000	0.297
			4	0.834	0.097	1.000	0.071
		10	1	1.000	0.875	1.000	0.875
			2	1.000	0.559	1.000	0.559
			3	0.997	0.453	1.000	0.451
			4	0.997	0.406	1.000	0.403
		15	1	1.000	0.869	1.000	0.869
			2	1.000	0.623	1.000	0.623
			3	0.999	0.660	1.000	0.660
			4	1.000	0.620	1.000	0.620
	ts-K-means	5	1	1.000	0.786	1.000	0.786
			2	0.891	0.589	1.000	0.505
			3	0.963	0.197	1.000	0.179
			4	0.679	0.080	1.000	0.052
		10	1	1.000	0.833	1.000	0.833
			2	0.987	0.640	1.000	0.627
			3	0.999	0.434	1.000	0.434
			4	0.938	0.322	1.000	0.301
		15	1	1.000	0.853	1.000	0.853
			2	1.000	0.690	1.000	0.690
			3	1.000	0.549	1.000	0.549
			4	0.992	0.522	1.000	0.518
	DBSCAN	$\emptyset$	1	1.000	0.858	1.000	0.858
			2	0.998	0.549	1.000	0.547
			3	0.881	0.582	1.000	0.483
			4	0.962	0.319	1.000	0.291
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	1.000	0.825	1.000	0.825

TABLEAU A.7 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err(\mathcal{S}_1)$	$Err(\mathcal{S}_2)$	$Err(\mathcal{S}_3)$	$Err(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$9.45 \pm 5.80e^{-02}$	$2.92 \pm 2.55e^{-02}$	$8.62 \pm 6.23e^{-02}$	$1.38 \pm 0.80e^{+00}$
			2	$1.14 \pm 0.72e^{-01}$	$4.42 \pm 5.04e^{-02}$	$1.04 \pm 0.77e^{-01}$	$1.92 \pm 1.55e^{+00}$
			3	$1.08 \pm 0.71e^{-01}$	$4.70 \pm 5.46e^{-02}$	$1.27 \pm 0.83e^{-01}$	$2.02 \pm 1.66e^{+00}$
			4	$1.48 \pm 0.76e^{-01}$	$4.89 \pm 5.55e^{-02}$	$1.87 \pm 1.01e^{-01}$	$2.34 \pm 1.66e^{+00}$
		10	1	$7.79 \pm 4.98e^{-02}$	$2.73 \pm 2.27e^{-02}$	$7.61 \pm 5.58e^{-02}$	$1.24 \pm 0.70e^{+00}$
			2	$6.56 \pm 4.90e^{-02}$	$3.13 \pm 2.48e^{-02}$	$7.43 \pm 5.43e^{-02}$	$1.30 \pm 0.78e^{+00}$
			3	$8.02 \pm 5.36e^{-02}$	$3.32 \pm 2.31e^{-02}$	$9.81 \pm 6.64e^{-02}$	$1.45 \pm 0.75e^{+00}$
			4	$9.78 \pm 6.57e^{-02}$	$4.46 \pm 4.28e^{-02}$	$1.16 \pm 0.83e^{-01}$	$1.88 \pm 1.31e^{+00}$
		15	1	$7.03 \pm 4.69e^{-02}$	$2.64 \pm 2.28e^{-02}$	$7.58 \pm 5.27e^{-02}$	$1.18 \pm 0.70e^{+00}$
			2	$6.12 \pm 4.62e^{-02}$	$2.92 \pm 2.00e^{-02}$	$7.33 \pm 5.53e^{-02}$	$1.22 \pm 0.64e^{+00}$
			3	$7.44 \pm 4.86e^{-02}$	$3.02 \pm 2.41e^{-02}$	$9.09 \pm 6.20e^{-02}$	$1.33 \pm 0.75e^{+00}$
			4	$7.31 \pm 5.17e^{-02}$	$3.20 \pm 2.53e^{-02}$	$8.78 \pm 6.52e^{-02}$	$1.37 \pm 0.80e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$9.22 \pm 5.37e^{-02}$	$2.98 \pm 2.62e^{-02}$	$8.74 \pm 5.85e^{-02}$	$1.39 \pm 0.80e^{+00}$
			2	$1.24 \pm 0.81e^{-01}$	$3.96 \pm 4.05e^{-02}$	$1.17 \pm 0.85e^{-01}$	$1.85 \pm 1.28e^{+00}$
			3	$9.44 \pm 6.78e^{-02}$	$3.97 \pm 4.25e^{-02}$	$1.19 \pm 0.79e^{-01}$	$1.74 \pm 1.31e^{+00}$
			4	$1.50 \pm 0.74e^{-01}$	$4.77 \pm 6.28e^{-02}$	$1.87 \pm 1.02e^{-01}$	$2.31 \pm 1.87e^{+00}$
		10	1	$7.29 \pm 4.79e^{-02}$	$2.84 \pm 2.44e^{-02}$	$7.73 \pm 5.69e^{-02}$	$1.25 \pm 0.75e^{+00}$
			2	$7.50 \pm 5.64e^{-02}$	$3.46 \pm 3.21e^{-02}$	$8.56 \pm 6.11e^{-02}$	$1.45 \pm 1.00e^{+00}$
			3	$8.46 \pm 5.54e^{-02}$	$3.50 \pm 3.08e^{-02}$	$9.57 \pm 6.71e^{-02}$	$1.52 \pm 0.95e^{+00}$
			4	$1.02 \pm 0.67e^{-01}$	$4.06 \pm 4.25e^{-02}$	$1.21 \pm 0.82e^{-01}$	$1.79 \pm 1.31e^{+00}$
		15	1	$6.53 \pm 4.67e^{-02}$	$2.92 \pm 2.34e^{-02}$	$7.15 \pm 5.42e^{-02}$	$1.23 \pm 0.72e^{+00}$
			2	$6.41 \pm 5.04e^{-02}$	$3.35 \pm 2.84e^{-02}$	$7.48 \pm 5.66e^{-02}$	$1.36 \pm 0.88e^{+00}$
			3	$7.67 \pm 5.04e^{-02}$	$3.30 \pm 2.91e^{-02}$	$8.79 \pm 6.30e^{-02}$	$1.42 \pm 0.89e^{+00}$
			4	$7.54 \pm 5.42e^{-02}$	$3.58 \pm 3.23e^{-02}$	$9.59 \pm 6.81e^{-02}$	$1.50 \pm 1.00e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$9.59 \pm 6.11e^{-02}$	$3.03 \pm 2.61e^{-02}$	$9.25 \pm 6.57e^{-02}$	$1.43 \pm 0.82e^{+00}$
			2	$1.15 \pm 0.75e^{-01}$	$4.53 \pm 5.30e^{-02}$	$1.09 \pm 0.81e^{-01}$	$1.97 \pm 1.63e^{+00}$
			3	$1.10 \pm 0.72e^{-01}$	$4.47 \pm 5.47e^{-02}$	$1.32 \pm 0.82e^{-01}$	$1.96 \pm 1.67e^{+00}$
			4	$1.48 \pm 0.77e^{-01}$	$4.50 \pm 5.01e^{-02}$	$1.92 \pm 1.00e^{-01}$	$2.23 \pm 1.53e^{+00}$
		10	1	$8.12 \pm 5.02e^{-02}$	$2.86 \pm 2.42e^{-02}$	$7.96 \pm 5.73e^{-02}$	$1.29 \pm 0.76e^{+00}$
			2	$6.73 \pm 4.92e^{-02}$	$3.14 \pm 2.39e^{-02}$	$7.73 \pm 5.75e^{-02}$	$1.31 \pm 0.75e^{+00}$
			3	$8.34 \pm 5.34e^{-02}$	$3.30 \pm 2.52e^{-02}$	$1.03 \pm 0.68e^{-01}$	$1.47 \pm 0.78e^{+00}$
			4	$9.64 \pm 6.35e^{-02}$	$4.05 \pm 3.47e^{-02}$	$1.14 \pm 0.79e^{-01}$	$1.76 \pm 1.08e^{+00}$
		15	1	$6.95 \pm 4.68e^{-02}$	$2.59 \pm 2.19e^{-02}$	$7.31 \pm 5.15e^{-02}$	$1.16 \pm 0.67e^{+00}$
			2	$6.08 \pm 4.54e^{-02}$	$2.87 \pm 2.01e^{-02}$	$6.88 \pm 5.14e^{-02}$	$1.19 \pm 0.63e^{+00}$
			3	$7.58 \pm 5.06e^{-02}$	$2.76 \pm 1.88e^{-02}$	$8.83 \pm 6.15e^{-02}$	$1.26 \pm 0.61e^{+00}$
			4	$6.81 \pm 4.89e^{-02}$	$3.20 \pm 2.54e^{-02}$	$8.34 \pm 5.92e^{-02}$	$1.34 \pm 0.79e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$1.02 \pm 0.73e^{-01}$	$2.66 \pm 2.00e^{-02}$	$9.86 \pm 7.17e^{-02}$	$1.35 \pm 0.68e^{+00}$
			2	$1.43 \pm 0.74e^{-01}$	$4.87 \pm 6.33e^{-02}$	$1.46 \pm 0.89e^{-01}$	$2.24 \pm 1.86e^{+00}$
			3	$1.15 \pm 0.81e^{-01}$	$3.64 \pm 2.32e^{-02}$	$1.20 \pm 0.82e^{-01}$	$1.73 \pm 0.78e^{+00}$
			4	$1.72 \pm 0.77e^{-01}$	$3.82 \pm 3.13e^{-02}$	$1.76 \pm 0.97e^{-01}$	$2.11 \pm 0.99e^{+00}$
		10	1	$8.04 \pm 6.04e^{-02}$	$2.69 \pm 2.09e^{-02}$	$8.35 \pm 6.23e^{-02}$	$1.25 \pm 0.68e^{+00}$
			2	$1.11 \pm 0.69e^{-01}$	$4.33 \pm 5.00e^{-02}$	$1.17 \pm 0.80e^{-01}$	$1.90 \pm 1.51e^{+00}$
			3	$9.18 \pm 6.19e^{-02}$	$3.33 \pm 2.90e^{-02}$	$1.02 \pm 0.70e^{-01}$	$1.51 \pm 0.92e^{+00}$
			4	$1.34 \pm 0.73e^{-01}$	$3.77 \pm 3.47e^{-02}$	$1.45 \pm 0.90e^{-01}$	$1.89 \pm 1.07e^{+00}$
		15	1	$7.21 \pm 5.12e^{-02}$	$2.69 \pm 2.30e^{-02}$	$7.58 \pm 5.59e^{-02}$	$1.20 \pm 0.71e^{+00}$
			2	$8.50 \pm 5.86e^{-02}$	$3.88 \pm 3.78e^{-02}$	$9.49 \pm 6.64e^{-02}$	$1.63 \pm 1.15e^{+00}$
			3	$8.30 \pm 5.93e^{-02}$	$3.28 \pm 2.53e^{-02}$	$9.26 \pm 6.60e^{-02}$	$1.44 \pm 0.81e^{+00}$
			4	$1.08 \pm 0.67e^{-01}$	$3.84 \pm 4.10e^{-02}$	$1.14 \pm 0.79e^{-01}$	$1.75 \pm 1.25e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$1.32 \pm 0.70e^{-01}$	$4.22 \pm 4.04e^{-02}$	$1.27 \pm 0.89e^{-01}$	$1.98 \pm 1.20e^{+00}$
			2	$1.12 \pm 0.73e^{-01}$	$4.53 \pm 6.41e^{-02}$	$1.34 \pm 0.93e^{-01}$	$1.99 \pm 1.95e^{+00}$
			3	$1.34 \pm 0.72e^{-01}$	$4.81 \pm 6.14e^{-02}$	$1.33 \pm 0.89e^{-01}$	$2.17 \pm 1.85e^{+00}$
			4	$1.10 \pm 0.70e^{-01}$	$3.54 \pm 2.51e^{-02}$	$1.45 \pm 0.94e^{-01}$	$1.72 \pm 0.84e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$4.75 \pm 3.60e^{-02}$	$2.16 \pm 1.59e^{-02}$	$5.64 \pm 4.17e^{-02}$	$9.13 \pm 5.05e^{-01}$

TABLEAU A.8 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(S_3)$	$Err'(\S)$
50	K-means	5	1	$9.45 \pm 5.80e^{-02}$	$2.83 \pm 2.76e^{-02}$	$8.62 \pm 6.23e^{-02}$	$1.36 \pm 0.85e^{+00}$
			2	$1.10 \pm 0.70e^{-01}$	$5.58 \pm 7.34e^{-02}$	$1.04 \pm 0.77e^{-01}$	$2.27 \pm 2.15e^{+00}$
			3	$9.93 \pm 6.47e^{-02}$	$7.00 \pm 8.82e^{-02}$	$1.27 \pm 0.83e^{-01}$	$2.75 \pm 2.66e^{+00}$
			4	$1.34 \pm 0.72e^{-01}$	$1.65 \pm 1.15e^{-01}$	$1.87 \pm 1.01e^{-01}$	$5.44 \pm 3.33e^{+00}$
		10	1	$7.79 \pm 4.98e^{-02}$	$2.62 \pm 2.40e^{-02}$	$7.61 \pm 5.58e^{-02}$	$1.21 \pm 0.74e^{+00}$
			2	$6.56 \pm 4.90e^{-02}$	$2.86 \pm 3.27e^{-02}$	$7.43 \pm 5.43e^{-02}$	$1.22 \pm 1.01e^{+00}$
			3	$7.99 \pm 5.32e^{-02}$	$3.14 \pm 3.43e^{-02}$	$9.81 \pm 6.64e^{-02}$	$1.40 \pm 1.07e^{+00}$
			4	$9.72 \pm 6.52e^{-02}$	$5.81 \pm 6.33e^{-02}$	$1.16 \pm 0.83e^{-01}$	$2.25 \pm 1.91e^{+00}$
		15	1	$7.03 \pm 4.69e^{-02}$	$2.51 \pm 2.42e^{-02}$	$7.58 \pm 5.27e^{-02}$	$1.14 \pm 0.74e^{+00}$
			2	$6.12 \pm 4.62e^{-02}$	$2.56 \pm 2.51e^{-02}$	$7.33 \pm 5.53e^{-02}$	$1.11 \pm 0.78e^{+00}$
			3	$7.44 \pm 4.86e^{-02}$	$2.76 \pm 2.99e^{-02}$	$9.09 \pm 6.20e^{-02}$	$1.25 \pm 0.91e^{+00}$
			4	$7.31 \pm 5.17e^{-02}$	$3.02 \pm 3.24e^{-02}$	$8.78 \pm 6.52e^{-02}$	$1.32 \pm 1.00e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$9.21 \pm 5.36e^{-02}$	$2.88 \pm 2.87e^{-02}$	$8.74 \pm 5.85e^{-02}$	$1.36 \pm 0.87e^{+00}$
			2	$1.20 \pm 0.80e^{-01}$	$4.69 \pm 6.35e^{-02}$	$1.17 \pm 0.85e^{-01}$	$2.09 \pm 1.97e^{+00}$
			3	$8.98 \pm 6.39e^{-02}$	$5.82 \pm 8.97e^{-02}$	$1.19 \pm 0.79e^{-01}$	$2.25 \pm 2.65e^{+00}$
			4	$1.36 \pm 0.70e^{-01}$	$1.35 \pm 1.48e^{-01}$	$1.87 \pm 1.02e^{-01}$	$4.88 \pm 4.39e^{+00}$
		10	1	$7.29 \pm 4.79e^{-02}$	$2.73 \pm 2.63e^{-02}$	$7.73 \pm 5.69e^{-02}$	$1.22 \pm 0.80e^{+00}$
			2	$7.40 \pm 5.52e^{-02}$	$3.46 \pm 4.51e^{-02}$	$8.56 \pm 6.11e^{-02}$	$1.45 \pm 1.38e^{+00}$
			3	$8.42 \pm 5.49e^{-02}$	$3.52 \pm 4.44e^{-02}$	$9.57 \pm 6.71e^{-02}$	$1.53 \pm 1.32e^{+00}$
			4	$1.01 \pm 0.67e^{-01}$	$4.80 \pm 6.32e^{-02}$	$1.21 \pm 0.82e^{-01}$	$1.98 \pm 1.88e^{+00}$
		15	1	$6.53 \pm 4.67e^{-02}$	$2.82 \pm 2.52e^{-02}$	$7.15 \pm 5.42e^{-02}$	$1.20 \pm 0.76e^{+00}$
			2	$6.41 \pm 5.04e^{-02}$	$3.27 \pm 3.65e^{-02}$	$7.48 \pm 5.66e^{-02}$	$1.34 \pm 1.11e^{+00}$
			3	$7.65 \pm 5.01e^{-02}$	$3.21 \pm 3.60e^{-02}$	$8.79 \pm 6.30e^{-02}$	$1.39 \pm 1.08e^{+00}$
			4	$7.54 \pm 5.42e^{-02}$	$3.66 \pm 4.32e^{-02}$	$9.59 \pm 6.81e^{-02}$	$1.53 \pm 1.30e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$9.59 \pm 6.11e^{-02}$	$2.96 \pm 2.80e^{-02}$	$9.25 \pm 6.57e^{-02}$	$1.41 \pm 0.87e^{+00}$
			2	$1.10 \pm 0.72e^{-01}$	$5.79 \pm 7.67e^{-02}$	$1.09 \pm 0.81e^{-01}$	$2.38 \pm 2.32e^{+00}$
			3	$1.00 \pm 0.65e^{-01}$	$6.25 \pm 8.86e^{-02}$	$1.32 \pm 0.82e^{-01}$	$2.52 \pm 2.64e^{+00}$
			4	$1.31 \pm 0.72e^{-01}$	$1.41 \pm 1.25e^{-01}$	$1.92 \pm 1.00e^{-01}$	$4.73 \pm 3.58e^{+00}$
		10	1	$8.12 \pm 5.02e^{-02}$	$2.77 \pm 2.57e^{-02}$	$7.96 \pm 5.73e^{-02}$	$1.27 \pm 0.80e^{+00}$
			2	$6.73 \pm 4.92e^{-02}$	$2.88 \pm 3.18e^{-02}$	$7.73 \pm 5.75e^{-02}$	$1.25 \pm 0.97e^{+00}$
			3	$8.29 \pm 5.28e^{-02}$	$3.10 \pm 3.74e^{-02}$	$1.03 \pm 0.68e^{-01}$	$1.40 \pm 1.11e^{+00}$
			4	$9.59 \pm 6.31e^{-02}$	$4.89 \pm 5.33e^{-02}$	$1.14 \pm 0.79e^{-01}$	$2.01 \pm 1.61e^{+00}$
		15	1	$6.95 \pm 4.68e^{-02}$	$2.45 \pm 2.32e^{-02}$	$7.31 \pm 5.15e^{-02}$	$1.12 \pm 0.70e^{+00}$
			2	$6.08 \pm 4.54e^{-02}$	$2.50 \pm 2.47e^{-02}$	$6.88 \pm 5.14e^{-02}$	$1.08 \pm 0.76e^{+00}$
			3	$7.57 \pm 5.03e^{-02}$	$2.39 \pm 2.23e^{-02}$	$8.83 \pm 6.15e^{-02}$	$1.15 \pm 0.70e^{+00}$
			4	$6.81 \pm 4.89e^{-02}$	$3.03 \pm 3.21e^{-02}$	$8.34 \pm 5.92e^{-02}$	$1.29 \pm 0.98e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$1.02 \pm 0.73e^{-01}$	$2.44 \pm 2.21e^{-02}$	$9.86 \pm 7.17e^{-02}$	$1.29 \pm 0.73e^{+00}$
			2	$1.32 \pm 0.70e^{-01}$	$5.84 \pm 8.10e^{-02}$	$1.46 \pm 0.89e^{-01}$	$2.51 \pm 2.42e^{+00}$
			3	$1.10 \pm 0.79e^{-01}$	$4.30 \pm 5.17e^{-02}$	$1.20 \pm 0.82e^{-01}$	$1.97 \pm 1.55e^{+00}$
			4	$1.42 \pm 0.76e^{-01}$	$7.80 \pm 10.30e^{-02}$	$1.76 \pm 0.97e^{-01}$	$2.94 \pm 2.99e^{+00}$
		10	1	$8.04 \pm 6.04e^{-02}$	$2.53 \pm 2.25e^{-02}$	$8.35 \pm 6.23e^{-02}$	$1.21 \pm 0.73e^{+00}$
			2	$1.09 \pm 0.68e^{-01}$	$4.81 \pm 6.20e^{-02}$	$1.17 \pm 0.80e^{-01}$	$2.04 \pm 1.85e^{+00}$
			3	$9.16 \pm 6.17e^{-02}$	$3.14 \pm 4.39e^{-02}$	$1.02 \pm 0.70e^{-01}$	$1.46 \pm 1.33e^{+00}$
			4	$1.27 \pm 0.71e^{-01}$	$4.40 \pm 6.06e^{-02}$	$1.45 \pm 0.90e^{-01}$	$2.03 \pm 1.80e^{+00}$
		15	1	$7.21 \pm 5.12e^{-02}$	$2.55 \pm 2.46e^{-02}$	$7.58 \pm 5.59e^{-02}$	$1.17 \pm 0.75e^{+00}$
			2	$8.50 \pm 5.86e^{-02}$	$4.06 \pm 4.54e^{-02}$	$9.49 \pm 6.64e^{-02}$	$1.69 \pm 1.36e^{+00}$
			3	$8.30 \pm 5.93e^{-02}$	$3.11 \pm 3.41e^{-02}$	$9.26 \pm 6.60e^{-02}$	$1.40 \pm 1.06e^{+00}$
			4	$1.07 \pm 0.67e^{-01}$	$4.18 \pm 5.65e^{-02}$	$1.14 \pm 0.79e^{-01}$	$1.82 \pm 1.68e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$1.32 \pm 0.70e^{-01}$	$4.34 \pm 4.34e^{-02}$	$1.27 \pm 0.89e^{-01}$	$2.01 \pm 1.28e^{+00}$
			2	$1.12 \pm 0.73e^{-01}$	$5.40 \pm 8.55e^{-02}$	$1.34 \pm 0.93e^{-01}$	$2.27 \pm 2.58e^{+00}$
			3	$1.20 \pm 0.66e^{-01}$	$5.77 \pm 7.91e^{-02}$	$1.33 \pm 0.89e^{-01}$	$2.31 \pm 2.21e^{+00}$
			4	$1.05 \pm 0.67e^{-01}$	$3.67 \pm 4.44e^{-02}$	$1.45 \pm 0.94e^{-01}$	$1.76 \pm 1.30e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$4.75 \pm 3.60e^{-02}$	$1.88 \pm 1.62e^{-02}$	$5.64 \pm 4.17e^{-02}$	$8.40 \pm 5.21e^{-01}$

TABLEAU A.9 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}$ du modèle de proies prédateurs.

A.4 Jeu de paramètres n° 3

N	méthode	k	m	$\overline{B}(\mathcal{S}_1)$	$\overline{B}(\mathcal{S}_2)$	$\overline{B}(\mathcal{S}_3)$	$\overline{B}_3(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	0.000	0.007	1.000	0.000
			2	0.000	0.019	1.000	0.000
			3	0.000	0.001	1.000	0.000
			4	0.000	0.001	1.000	0.000
		10	1	0.001	0.007	1.000	0.000
			2	0.001	0.014	1.000	0.000
			3	0.000	0.007	1.000	0.000
			4	0.000	0.011	1.000	0.000
		15	1	0.000	0.006	1.000	0.000
			2	0.000	0.019	1.000	0.000
			3	0.000	0.015	1.000	0.000
			4	0.001	0.017	1.000	0.000
	K-medoids	5	1	0.000	0.011	1.000	0.000
			2	0.000	0.016	1.000	0.000
			3	0.000	0.000	1.000	0.000
			4	0.000	0.007	1.000	0.000
		10	1	0.000	0.018	1.000	0.000
			2	0.000	0.017	1.000	0.000
			3	0.000	0.019	1.000	0.000
			4	0.000	0.019	1.000	0.000
		15	1	0.000	0.016	1.000	0.000
			2	0.000	0.010	1.000	0.000
			3	0.000	0.019	1.000	0.000
			4	0.000	0.020	1.000	0.000
	agglomerative	5	1	0.000	0.005	1.000	0.000
			2	0.001	0.021	1.000	0.000
			3	0.000	0.001	1.000	0.000
			4	0.000	0.004	1.000	0.000
		10	1	0.000	0.008	1.000	0.000
			2	0.000	0.010	1.000	0.000
			3	0.000	0.014	1.000	0.000
			4	0.000	0.015	1.000	0.000
		15	1	0.000	0.007	1.000	0.000
			2	0.000	0.014	1.000	0.000
			3	0.000	0.011	1.000	0.000
			4	0.001	0.023	1.000	0.001
	ts-K-means	5	1	0.000	0.004	1.000	0.000
			2	0.000	0.011	1.000	0.000
			3	0.000	0.000	1.000	0.000
			4	0.000	0.000	1.000	0.000
		10	1	0.001	0.006	1.000	0.000
			2	0.001	0.008	1.000	0.000
			3	0.000	0.004	1.000	0.000
			4	0.000	0.008	1.000	0.000
		15	1	0.000	0.009	1.000	0.000
			2	0.000	0.010	1.000	0.000
			3	0.000	0.009	1.000	0.000
			4	0.000	0.011	1.000	0.000
	DBSCAN	$\emptyset$	1	0.000	0.010	1.000	0.000
			2	0.000	0.014	1.000	0.000
			3	0.000	0.024	1.000	0.000
			4	0.000	0.020	1.000	0.000
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	0.000	0.009	1.000	0.000

TABLEAU A.10 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err(\mathcal{S}_1)$	$Err(\mathcal{S}_2)$	$Err(\mathcal{S}_3)$	$Err(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.89 \pm 13.90e^{-04}$	$1.92 \pm 13.90e^{-04}$	$2.81 \pm 13.40e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.78 \pm 7.15e^{-04}$	$1.82 \pm 7.15e^{-04}$	$2.71 \pm 6.88e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.11 \pm 2.26e^{-04}$	$1.15 \pm 2.26e^{-04}$	$2.07 \pm 2.17e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.13 \pm 2.78e^{-04}$	$1.37 \pm 6.90e^{-04}$	$2.08 \pm 2.67e^{+00}$
		10	1	$2.00 \pm 50.50e^{-05}$	$1.87 \pm 11.50e^{-04}$	$2.26 \pm 14.00e^{-04}$	$6.79 \pm 127.00e^{+00}$
			2	$6.39 \pm 75.60e^{-06}$	$1.98 \pm 13.00e^{-04}$	$2.40 \pm 15.00e^{-04}$	$3.50 \pm 22.70e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.53 \pm 7.91e^{-04}$	$1.65 \pm 8.29e^{-04}$	$2.47 \pm 7.61e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.81 \pm 10.00e^{-04}$	$2.45 \pm 14.80e^{-04}$	$2.74 \pm 9.65e^{+00}$
		15	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.83 \pm 11.80e^{-04}$	$2.13 \pm 14.40e^{-04}$	$2.76 \pm 11.30e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.32 \pm 11.20e^{-04}$	$3.32 \pm 16.90e^{-04}$	$3.23 \pm 10.70e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.48 \pm 4.25e^{-04}$	$2.63 \pm 16.30e^{-04}$	$2.42 \pm 4.08e^{+00}$
			4	$7.33 \pm 105.00e^{-06}$	$1.72 \pm 7.19e^{-04}$	$4.34 \pm 33.60e^{-04}$	$3.48 \pm 27.10e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.04 \pm 13.60e^{-04}$	$2.08 \pm 13.60e^{-04}$	$2.96 \pm 13.10e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.50 \pm 4.88e^{-04}$	$1.54 \pm 4.87e^{-04}$	$2.44 \pm 4.69e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.04 \pm 0.00e^{-04}$	$1.08 \pm 0.00e^{-04}$	$2.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.31 \pm 4.48e^{-04}$	$1.35 \pm 4.48e^{-04}$	$2.26 \pm 4.31e^{+00}$
		10	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.92 \pm 15.60e^{-04}$	$2.96 \pm 15.60e^{-04}$	$3.81 \pm 15.00e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.06 \pm 10.80e^{-04}$	$2.10 \pm 10.80e^{-04}$	$2.98 \pm 10.40e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.04 \pm 10.30e^{-04}$	$2.08 \pm 10.30e^{-04}$	$2.96 \pm 9.94e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.58 \pm 23.10e^{-04}$	$2.62 \pm 23.10e^{-04}$	$3.48 \pm 22.20e^{+00}$
		15	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.94 \pm 17.10e^{-04}$	$2.98 \pm 17.10e^{-04}$	$3.83 \pm 16.40e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.97 \pm 10.60e^{-04}$	$2.01 \pm 10.60e^{-04}$	$2.90 \pm 10.20e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.07 \pm 11.50e^{-04}$	$2.11 \pm 11.40e^{-04}$	$2.99 \pm 11.00e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.42 \pm 14.50e^{-04}$	$2.45 \pm 14.50e^{-04}$	$3.32 \pm 14.00e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.89 \pm 14.60e^{-04}$	$7.33 \pm 90.20e^{-04}$	$2.82 \pm 14.00e^{+00}$
			2	$4.79 \pm 25.00e^{-06}$	$1.68 \pm 6.91e^{-04}$	$5.32 \pm 82.60e^{-04}$	$2.81 \pm 9.11e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.06 \pm 0.69e^{-04}$	$1.63 \pm 18.00e^{-04}$	$2.02 \pm 0.67e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.22 \pm 3.23e^{-04}$	$1.42 \pm 13.30e^{-03}$	$2.17 \pm 3.11e^{+00}$
		10	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.86 \pm 11.10e^{-04}$	$4.10 \pm 47.30e^{-04}$	$2.79 \pm 10.60e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.45 \pm 4.64e^{-04}$	$6.65 \pm 66.90e^{-04}$	$2.40 \pm 4.46e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.68 \pm 6.55e^{-04}$	$1.07 \pm 9.50e^{-03}$	$2.61 \pm 6.30e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.13 \pm 14.20e^{-04}$	$1.42 \pm 9.75e^{-03}$	$3.05 \pm 13.70e^{+00}$
		15	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.96 \pm 12.10e^{-04}$	$3.20 \pm 25.00e^{-04}$	$2.88 \pm 11.60e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.34 \pm 12.90e^{-04}$	$3.57 \pm 20.60e^{-04}$	$3.25 \pm 12.40e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.68 \pm 7.48e^{-04}$	$6.36 \pm 53.60e^{-04}$	$2.61 \pm 7.19e^{+00}$
			4	$5.47 \pm 46.60e^{-06}$	$1.99 \pm 8.86e^{-04}$	$9.67 \pm 64.00e^{-04}$	$3.28 \pm 14.70e^{+00}$
	ts-K-means	5	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.69 \pm 11.40e^{-04}$	$5.33 \pm 81.20e^{-04}$	$2.63 \pm 11.00e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.82 \pm 8.66e^{-04}$	$3.06 \pm 38.90e^{-04}$	$2.75 \pm 8.33e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.04 \pm 0.00e^{-04}$	$2.92 \pm 51.10e^{-04}$	$2.00 \pm 0.01e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.04 \pm 0.00e^{-04}$	$3.30 \pm 43.00e^{-04}$	$2.00 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$1.20 \pm 25.30e^{-05}$	$1.95 \pm 13.60e^{-04}$	$2.14 \pm 14.10e^{-04}$	$4.87 \pm 64.50e^{+00}$
			2	$1.84 \pm 45.50e^{-05}$	$1.42 \pm 5.32e^{-04}$	$2.76 \pm 27.20e^{-04}$	$5.96 \pm 114.00e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.37 \pm 6.92e^{-04}$	$4.86 \pm 55.40e^{-04}$	$2.31 \pm 6.65e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.69 \pm 9.28e^{-04}$	$8.83 \pm 66.40e^{-04}$	$2.62 \pm 8.93e^{+00}$
		15	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.20 \pm 12.50e^{-04}$	$4.18 \pm 43.10e^{-04}$	$3.12 \pm 12.10e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.26 \pm 17.30e^{-04}$	$2.71 \pm 19.10e^{-04}$	$3.17 \pm 16.60e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.92 \pm 12.50e^{-04}$	$2.77 \pm 20.00e^{-04}$	$2.85 \pm 12.00e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.81 \pm 10.10e^{-04}$	$5.32 \pm 41.00e^{-04}$	$2.74 \pm 9.67e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.29 \pm 13.30e^{-04}$	$2.33 \pm 13.30e^{-04}$	$3.20 \pm 12.80e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$1.85 \pm 8.90e^{-04}$	$2.19 \pm 24.20e^{-03}$	$2.79 \pm 8.55e^{+00}$
			3	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.01 \pm 7.42e^{-04}$	$1.82 \pm 18.60e^{-03}$	$2.94 \pm 7.14e^{+00}$
			4	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.10 \pm 15.70e^{-04}$	$8.64 \pm 118.00e^{-04}$	$3.02 \pm 15.10e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$4.00 \pm 0.00e^{-06}$	$2.82 \pm 18.70e^{-04}$	$2.86 \pm 18.70e^{-04}$	$3.71 \pm 18.00e^{+00}$

TABLEAU A.11 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

N	méthode	k	m	$Err'(\mathcal{S}_1)$	$Err'(\mathcal{S}_2)$	$Err'(\mathcal{S}_3)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	nan	$1.22 \pm 1.15e^{-02}$	$1.92 \pm 13.90e^{-04}$	nan
			2	nan	$4.01 \pm 3.46e^{-03}$	$1.82 \pm 7.15e^{-04}$	nan
			3	nan	$7.26 \pm 0.00e^{-03}$	$1.15 \pm 2.26e^{-04}$	nan
			4	nan	$8.90 \pm 0.00e^{-03}$	$1.37 \pm 6.90e^{-04}$	nan
		10	1	$1.60 \pm 0.00e^{-02}$	$1.19 \pm 0.71e^{-02}$	$2.26 \pm 14.00e^{-04}$	nan
			2	$2.40 \pm 0.00e^{-03}$	$6.81 \pm 8.77e^{-03}$	$2.40 \pm 15.00e^{-04}$	nan
			3	nan	$7.12 \pm 6.37e^{-03}$	$1.65 \pm 8.29e^{-04}$	nan
			4	nan	$7.13 \pm 6.54e^{-03}$	$2.45 \pm 14.80e^{-04}$	nan
		15	1	nan	$1.32 \pm 0.77e^{-02}$	$2.13 \pm 14.40e^{-04}$	nan
			2	nan	$6.82 \pm 4.64e^{-03}$	$3.32 \pm 16.90e^{-04}$	nan
			3	nan	$3.05 \pm 1.87e^{-03}$	$2.63 \pm 16.30e^{-04}$	nan
			4	$3.33 \pm 0.00e^{-03}$	$4.09 \pm 3.84e^{-03}$	$4.34 \pm 33.60e^{-04}$	nan
	K-medoids	5	1	nan	$9.17 \pm 9.35e^{-03}$	$2.08 \pm 13.60e^{-04}$	nan
			2	nan	$2.96 \pm 2.62e^{-03}$	$1.54 \pm 4.87e^{-04}$	nan
			3	nan	nan	$1.08 \pm 0.00e^{-04}$	nan
			4	nan	$3.96 \pm 3.73e^{-03}$	$1.35 \pm 4.48e^{-04}$	nan
		10	1	nan	$1.06 \pm 0.53e^{-02}$	$2.96 \pm 15.60e^{-04}$	nan
			2	nan	$6.11 \pm 5.79e^{-03}$	$2.10 \pm 10.80e^{-04}$	nan
			3	nan	$5.37 \pm 5.39e^{-03}$	$2.08 \pm 10.30e^{-04}$	nan
			4	nan	$8.21 \pm 14.70e^{-03}$	$2.62 \pm 23.10e^{-04}$	nan
		15	1	nan	$1.20 \pm 0.66e^{-02}$	$2.98 \pm 17.10e^{-04}$	nan
			2	nan	$9.42 \pm 5.14e^{-03}$	$2.01 \pm 10.60e^{-04}$	nan
			3	nan	$5.54 \pm 6.33e^{-03}$	$2.11 \pm 11.40e^{-04}$	nan
			4	nan	$6.99 \pm 7.70e^{-03}$	$2.45 \pm 14.50e^{-04}$	nan
	agglomerative	5	1	nan	$1.71 \pm 1.18e^{-02}$	$7.33 \pm 90.20e^{-04}$	nan
			2	$7.96 \pm 0.00e^{-04}$	$3.15 \pm 3.69e^{-03}$	$5.32 \pm 82.60e^{-04}$	nan
			3	nan	$2.30 \pm 0.00e^{-03}$	$1.63 \pm 18.00e^{-03}$	nan
			4	nan	$4.57 \pm 2.51e^{-03}$	$1.42 \pm 13.30e^{-03}$	nan
		10	1	nan	$1.04 \pm 0.69e^{-02}$	$4.10 \pm 47.30e^{-04}$	nan
			2	nan	$4.22 \pm 2.18e^{-03}$	$6.65 \pm 66.90e^{-04}$	nan
			3	nan	$4.66 \pm 3.19e^{-03}$	$1.07 \pm 9.50e^{-03}$	nan
			4	nan	$7.39 \pm 9.06e^{-03}$	$1.42 \pm 9.75e^{-03}$	nan
		15	1	nan	$1.32 \pm 0.62e^{-02}$	$3.20 \pm 25.00e^{-04}$	nan
			2	nan	$9.38 \pm 5.76e^{-03}$	$3.57 \pm 20.60e^{-04}$	nan
			3	nan	$5.89 \pm 4.22e^{-03}$	$6.36 \pm 53.60e^{-04}$	nan
			4	$1.48 \pm 0.00e^{-03}$	$4.23 \pm 4.19e^{-03}$	$9.67 \pm 64.00e^{-04}$	$3.83 \pm 0.00e^{+02}$
	ts-K-means	5	1	nan	$1.64 \pm 0.79e^{-02}$	$5.33 \pm 81.20e^{-04}$	nan
			2	nan	$7.22 \pm 4.26e^{-03}$	$3.06 \pm 38.90e^{-04}$	nan
			3	nan	nan	$2.92 \pm 51.10e^{-04}$	nan
			4	nan	nan	$3.30 \pm 43.00e^{-04}$	nan
		10	1	$8.00 \pm 0.00e^{-03}$	$1.52 \pm 0.91e^{-02}$	$2.14 \pm 14.10e^{-04}$	nan
			2	$1.44 \pm 0.00e^{-02}$	$4.80 \pm 3.68e^{-03}$	$2.76 \pm 27.20e^{-04}$	nan
			3	nan	$8.26 \pm 7.31e^{-03}$	$4.86 \pm 55.40e^{-04}$	nan
			4	nan	$8.22 \pm 6.51e^{-03}$	$8.83 \pm 66.40e^{-04}$	nan
		15	1	nan	$1.30 \pm 0.30e^{-02}$	$4.18 \pm 43.10e^{-04}$	nan
			2	nan	$1.23 \pm 1.23e^{-02}$	$2.71 \pm 19.10e^{-04}$	nan
			3	nan	$9.91 \pm 8.86e^{-03}$	$2.77 \pm 20.00e^{-04}$	nan
			4	nan	$7.06 \pm 6.64e^{-03}$	$5.32 \pm 41.00e^{-04}$	nan
	DBSCAN	$\emptyset$	1	nan	$1.26 \pm 0.49e^{-02}$	$2.33 \pm 13.30e^{-04}$	nan
			2	nan	$5.92 \pm 4.81e^{-03}$	$2.19 \pm 24.20e^{-03}$	nan
			3	nan	$4.16 \pm 2.63e^{-03}$	$1.82 \pm 18.60e^{-03}$	nan
			4	nan	$5.42 \pm 9.80e^{-03}$	$8.64 \pm 118.00e^{-04}$	nan
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	nan	$1.99 \pm 0.00e^{-02}$	$2.86 \pm 18.70e^{-04}$	nan

TABLEAU A.12 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathbb{S}$ du modèle de proies prédateurs.

Annexe B

Résultats du modèle de virus

B.1 Paramétrage de référence

N	méthode	k	m	$\bar{B}(S_1)$	$\bar{B}(S_2)$	$\bar{B}(S)$
50	K-means	5	1	0.066	1.000	0.066
			2	0.073	1.000	0.073
			3	0.048	1.000	0.048
		10	4	0.027	1.000	0.027
			1	0.139	1.000	0.139
			2	0.146	1.000	0.146
		15	3	0.135	1.000	0.135
			4	0.134	1.000	0.134
			1	0.156	1.000	0.156
			2	0.203	1.000	0.203
			3	0.209	1.000	0.209
			4	0.192	1.000	0.192
	K-medoids	5	1	0.092	1.000	0.092
			2	0.121	1.000	0.121
			3	0.087	1.000	0.087
		10	4	0.078	1.000	0.078
			1	0.167	1.000	0.167
			2	0.211	1.000	0.211
		15	3	0.193	1.000	0.193
			4	0.227	1.000	0.227
			1	0.175	1.000	0.175
			2	0.245	1.000	0.245
			3	0.252	1.000	0.252
			4	0.257	1.000	0.257
	agglomerative	5	1	0.064	1.000	0.064
			2	0.076	1.000	0.076
			3	0.045	1.000	0.045
		10	4	0.034	1.000	0.034
			1	0.118	1.000	0.118
			2	0.141	1.000	0.141
		15	3	0.141	1.000	0.141
			4	0.130	1.000	0.130
			1	0.183	1.000	0.183
			2	0.197	1.000	0.197
			3	0.207	1.000	0.207
			4	0.219	1.000	0.219
		MC	1	0.230	1.000	0.230
			2	0.245	1.000	0.245
			3	0.285	1.000	0.285
			4	0.300	1.000	0.300
$\emptyset$			$\emptyset$	0.117	1.000	0.117

TABLEAU B.1 – Résultats issus du jeu de paramètres de base des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err(\mathcal{S}_1)$	$Err(\mathcal{S}_2)$	$Err(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$3.19 \pm 4.05e^{-03}$	$3.19 \pm 4.05e^{-03}$	$1.27 \pm 1.61e^{+00}$
			2	$3.26 \pm 3.72e^{-03}$	$3.26 \pm 3.72e^{-03}$	$1.29 \pm 1.48e^{+00}$
			3	$2.83 \pm 2.38e^{-03}$	$2.83 \pm 2.38e^{-03}$	$1.13 \pm 0.95e^{+00}$
			4	$2.86 \pm 3.47e^{-03}$	$2.86 \pm 3.47e^{-03}$	$1.14 \pm 1.38e^{+00}$
		10	1	$3.80 \pm 4.55e^{-03}$	$3.80 \pm 4.55e^{-03}$	$1.51 \pm 1.81e^{+00}$
			2	$3.90 \pm 5.47e^{-03}$	$3.90 \pm 5.47e^{-03}$	$1.55 \pm 2.17e^{+00}$
			3	$3.71 \pm 5.66e^{-03}$	$3.71 \pm 5.66e^{-03}$	$1.47 \pm 2.25e^{+00}$
			4	$3.45 \pm 4.40e^{-03}$	$3.45 \pm 4.40e^{-03}$	$1.37 \pm 1.75e^{+00}$
		15	1	$4.18 \pm 5.43e^{-03}$	$4.18 \pm 5.43e^{-03}$	$1.66 \pm 2.16e^{+00}$
			2	$4.61 \pm 6.57e^{-03}$	$4.61 \pm 6.57e^{-03}$	$1.83 \pm 2.61e^{+00}$
			3	$4.38 \pm 7.24e^{-03}$	$4.38 \pm 7.24e^{-03}$	$1.74 \pm 2.88e^{+00}$
			4	$4.16 \pm 7.23e^{-03}$	$4.16 \pm 7.23e^{-03}$	$1.65 \pm 2.87e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$3.28 \pm 3.66e^{-03}$	$3.28 \pm 3.66e^{-03}$	$1.30 \pm 1.45e^{+00}$
			2	$3.56 \pm 4.96e^{-03}$	$3.56 \pm 4.96e^{-03}$	$1.41 \pm 1.97e^{+00}$
			3	$3.20 \pm 4.27e^{-03}$	$3.20 \pm 4.27e^{-03}$	$1.27 \pm 1.69e^{+00}$
			4	$3.16 \pm 4.88e^{-03}$	$3.16 \pm 4.88e^{-03}$	$1.26 \pm 1.94e^{+00}$
		10	1	$4.38 \pm 6.19e^{-03}$	$4.38 \pm 6.19e^{-03}$	$1.74 \pm 2.46e^{+00}$
			2	$4.31 \pm 6.59e^{-03}$	$4.31 \pm 6.59e^{-03}$	$1.71 \pm 2.62e^{+00}$
			3	$4.17 \pm 6.96e^{-03}$	$4.17 \pm 6.96e^{-03}$	$1.65 \pm 2.77e^{+00}$
			4	$4.93 \pm 11.10e^{-03}$	$4.93 \pm 11.10e^{-03}$	$1.96 \pm 4.41e^{+00}$
		15	1	$4.43 \pm 6.05e^{-03}$	$4.43 \pm 6.05e^{-03}$	$1.76 \pm 2.40e^{+00}$
			2	$5.06 \pm 7.93e^{-03}$	$5.06 \pm 7.93e^{-03}$	$2.01 \pm 3.15e^{+00}$
			3	$5.00 \pm 9.47e^{-03}$	$5.00 \pm 9.47e^{-03}$	$1.99 \pm 3.76e^{+00}$
			4	$5.37 \pm 10.40e^{-03}$	$5.37 \pm 10.40e^{-03}$	$2.13 \pm 4.15e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$3.11 \pm 3.65e^{-03}$	$3.11 \pm 3.65e^{-03}$	$1.24 \pm 1.45e^{+00}$
			2	$3.27 \pm 4.20e^{-03}$	$3.27 \pm 4.20e^{-03}$	$1.30 \pm 1.67e^{+00}$
			3	$2.84 \pm 2.37e^{-03}$	$2.84 \pm 2.37e^{-03}$	$1.13 \pm 0.94e^{+00}$
			4	$2.80 \pm 2.41e^{-03}$	$2.80 \pm 2.41e^{-03}$	$1.11 \pm 0.96e^{+00}$
		10	1	$3.71 \pm 4.63e^{-03}$	$3.71 \pm 4.63e^{-03}$	$1.47 \pm 1.84e^{+00}$
			2	$3.64 \pm 4.84e^{-03}$	$3.64 \pm 4.84e^{-03}$	$1.45 \pm 1.92e^{+00}$
			3	$3.59 \pm 5.04e^{-03}$	$3.59 \pm 5.04e^{-03}$	$1.43 \pm 2.00e^{+00}$
			4	$3.49 \pm 5.12e^{-03}$	$3.49 \pm 5.12e^{-03}$	$1.39 \pm 2.03e^{+00}$
		15	1	$4.43 \pm 5.87e^{-03}$	$4.43 \pm 5.87e^{-03}$	$1.76 \pm 2.33e^{+00}$
			2	$4.65 \pm 7.69e^{-03}$	$4.65 \pm 7.69e^{-03}$	$1.85 \pm 3.05e^{+00}$
			3	$4.50 \pm 6.48e^{-03}$	$4.50 \pm 6.48e^{-03}$	$1.79 \pm 2.58e^{+00}$
			4	$4.04 \pm 6.64e^{-03}$	$4.04 \pm 6.64e^{-03}$	$1.60 \pm 2.64e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$5.10 \pm 7.82e^{-03}$	$5.10 \pm 7.82e^{-03}$	$2.03 \pm 3.11e^{+00}$
			2	$4.82 \pm 8.77e^{-03}$	$4.82 \pm 8.77e^{-03}$	$1.92 \pm 3.48e^{+00}$
			3	$4.80 \pm 10.00e^{-03}$	$4.80 \pm 10.00e^{-03}$	$1.91 \pm 3.97e^{+00}$
			4	$4.80 \pm 9.85e^{-03}$	$4.80 \pm 9.85e^{-03}$	$1.91 \pm 3.91e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$4.41 \pm 5.44e^{-03}$	$4.41 \pm 5.44e^{-03}$	$1.75 \pm 2.16e^{+00}$

TABLEAU B.2 – Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$1.26 \pm 1.24e^{-02}$	$3.19 \pm 4.05e^{-03}$	$4.99 \pm 4.94e^{+00}$
			2	$1.26 \pm 0.98e^{-02}$	$3.26 \pm 3.72e^{-03}$	$4.99 \pm 3.90e^{+00}$
			3	$8.99 \pm 8.86e^{-03}$	$2.83 \pm 2.38e^{-03}$	$3.57 \pm 3.52e^{+00}$
			4	$1.51 \pm 1.71e^{-02}$	$2.86 \pm 3.47e^{-03}$	$5.99 \pm 6.80e^{+00}$
		10	1	$1.17 \pm 0.87e^{-02}$	$3.80 \pm 4.55e^{-03}$	$4.64 \pm 3.47e^{+00}$
			2	$1.19 \pm 1.14e^{-02}$	$3.90 \pm 5.47e^{-03}$	$4.74 \pm 4.52e^{+00}$
			3	$1.13 \pm 1.31e^{-02}$	$3.71 \pm 5.66e^{-03}$	$4.48 \pm 5.19e^{+00}$
			4	$9.42 \pm 10.20e^{-03}$	$3.45 \pm 4.40e^{-03}$	$3.74 \pm 4.04e^{+00}$
		15	1	$1.31 \pm 0.97e^{-02}$	$4.18 \pm 5.43e^{-03}$	$5.21 \pm 3.86e^{+00}$
			2	$1.28 \pm 1.13e^{-02}$	$4.61 \pm 6.57e^{-03}$	$5.09 \pm 4.50e^{+00}$
			3	$1.14 \pm 1.37e^{-02}$	$4.38 \pm 7.24e^{-03}$	$4.52 \pm 5.46e^{+00}$
			4	$1.10 \pm 1.46e^{-02}$	$4.16 \pm 7.23e^{-03}$	$4.38 \pm 5.81e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$1.07 \pm 0.92e^{-02}$	$3.28 \pm 3.66e^{-03}$	$4.26 \pm 3.65e^{+00}$
			2	$1.11 \pm 1.18e^{-02}$	$3.56 \pm 4.96e^{-03}$	$4.39 \pm 4.69e^{+00}$
			3	$1.03 \pm 1.24e^{-02}$	$3.20 \pm 4.27e^{-03}$	$4.07 \pm 4.94e^{+00}$
			4	$1.07 \pm 1.56e^{-02}$	$3.16 \pm 4.88e^{-03}$	$4.25 \pm 6.20e^{+00}$
		10	1	$1.36 \pm 1.12e^{-02}$	$4.38 \pm 6.19e^{-03}$	$5.42 \pm 4.46e^{+00}$
			2	$1.10 \pm 1.22e^{-02}$	$4.31 \pm 6.59e^{-03}$	$4.36 \pm 4.85e^{+00}$
			3	$1.10 \pm 1.39e^{-02}$	$4.17 \pm 6.96e^{-03}$	$4.38 \pm 5.51e^{+00}$
			4	$1.31 \pm 2.13e^{-02}$	$4.93 \pm 11.10e^{-03}$	$5.22 \pm 8.48e^{+00}$
		15	1	$1.34 \pm 1.05e^{-02}$	$4.43 \pm 6.05e^{-03}$	$5.34 \pm 4.19e^{+00}$
			2	$1.29 \pm 1.33e^{-02}$	$5.06 \pm 7.93e^{-03}$	$5.11 \pm 5.27e^{+00}$
			3	$1.24 \pm 1.68e^{-02}$	$5.00 \pm 9.47e^{-03}$	$4.91 \pm 6.69e^{+00}$
			4	$1.36 \pm 1.83e^{-02}$	$5.37 \pm 10.40e^{-03}$	$5.40 \pm 7.25e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$1.17 \pm 1.14e^{-02}$	$3.11 \pm 3.65e^{-03}$	$4.64 \pm 4.53e^{+00}$
			2	$1.23 \pm 1.20e^{-02}$	$3.27 \pm 4.20e^{-03}$	$4.88 \pm 4.75e^{+00}$
			3	$9.59 \pm 8.75e^{-03}$	$2.84 \pm 2.37e^{-03}$	$3.81 \pm 3.48e^{+00}$
			4	$1.05 \pm 1.04e^{-02}$	$2.80 \pm 2.41e^{-03}$	$4.19 \pm 4.12e^{+00}$
		10	1	$1.25 \pm 0.97e^{-02}$	$3.71 \pm 4.63e^{-03}$	$4.98 \pm 3.83e^{+00}$
			2	$1.05 \pm 1.06e^{-02}$	$3.64 \pm 4.84e^{-03}$	$4.16 \pm 4.20e^{+00}$
			3	$1.01 \pm 1.14e^{-02}$	$3.59 \pm 5.04e^{-03}$	$4.01 \pm 4.55e^{+00}$
			4	$9.93 \pm 12.40e^{-03}$	$3.49 \pm 5.12e^{-03}$	$3.94 \pm 4.92e^{+00}$
		15	1	$1.29 \pm 1.00e^{-02}$	$4.43 \pm 5.87e^{-03}$	$5.13 \pm 3.96e^{+00}$
			2	$1.33 \pm 1.44e^{-02}$	$4.65 \pm 7.69e^{-03}$	$5.28 \pm 5.72e^{+00}$
			3	$1.21 \pm 1.14e^{-02}$	$4.50 \pm 6.48e^{-03}$	$4.79 \pm 4.54e^{+00}$
			4	$9.42 \pm 12.80e^{-03}$	$4.04 \pm 6.64e^{-03}$	$3.74 \pm 5.08e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$1.37 \pm 1.30e^{-02}$	$5.10 \pm 7.82e^{-03}$	$5.46 \pm 5.17e^{+00}$
			2	$1.19 \pm 1.57e^{-02}$	$4.82 \pm 8.77e^{-03}$	$4.73 \pm 6.25e^{+00}$
			3	$1.05 \pm 1.75e^{-02}$	$4.80 \pm 10.00e^{-03}$	$4.18 \pm 6.93e^{+00}$
			4	$1.01 \pm 1.68e^{-02}$	$4.80 \pm 9.85e^{-03}$	$4.01 \pm 6.68e^{+00}$
MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.87 \pm 0.47e^{-02}$	$4.41 \pm 5.44e^{-03}$	$7.42 \pm 1.88e^{+00}$	

TABLEAU B.3 – Résultats issus du jeu de paramètres de base des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

B.2 Jeu de paramètres n° 1

N	méthode	k	m	$\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_1)$	$\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_2)$	$\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	1.000	0.004	0.004
			2	1.000	0.013	0.013
			3	1.000	0.015	0.015
			4	1.000	0.028	0.028
			9	1.000	0.566	0.566
			24	1.000	0.977	0.977
		10	1	1.000	0.011	0.011
			2	1.000	0.006	0.006
			3	1.000	0.011	0.011
			4	1.000	0.028	0.028
			9	1.000	0.617	0.617
			24	1.000	0.999	0.999
		15	1	1.000	0.008	0.008
			2	1.000	0.006	0.006
			3	1.000	0.014	0.014
			4	1.000	0.038	0.038
			9	1.000	0.601	0.601
			24	1.000	0.999	0.999
	K-medoids	5	1	1.000	0.005	0.005
			2	1.000	0.003	0.003
			3	1.000	0.008	0.008
			4	1.000	0.014	0.014
			9	1.000	0.414	0.414
			24	1.000	0.947	0.947
		10	1	1.000	0.004	0.004
			2	1.000	0.004	0.004
			3	1.000	0.010	0.010
			4	1.000	0.011	0.011
			9	1.000	0.468	0.468
			24	1.000	0.988	0.988
		15	1	1.000	0.007	0.007
			2	1.000	0.002	0.002
			3	1.000	0.005	0.005
			4	1.000	0.013	0.013
			9	1.000	0.480	0.480
			24	1.000	0.991	0.991
	agglomerative	5	1	1.000	0.007	0.007
			2	1.000	0.000	0.000
			3	1.000	0.005	0.005
			4	1.000	0.009	0.009
			9	1.000	0.402	0.402
			24	1.000	0.978	0.978
		10	1	1.000	0.003	0.003
			2	1.000	0.000	0.000
			3	1.000	0.002	0.002
			4	1.000	0.018	0.018
			9	1.000	0.458	0.458
			24	1.000	0.998	0.998
		15	1	1.000	0.003	0.003
			2	1.000	0.001	0.001
			3	1.000	0.001	0.001
			4	1.000	0.015	0.015
			9	1.000	0.465	0.465
			24	1.000	1.000	1.000
	DBSCAN	$\emptyset$	1	1.000	0.004	0.004
			2	1.000	0.003	0.003
			3	1.000	0.005	0.005
			4	1.000	0.021	0.021
			9	1.000	0.441	0.441
			24	1.000	0.995	0.995
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	1.000	0.222	0.222

TABLEAU B.4 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err(\mathcal{S}_1)$	$Err(\mathcal{S}_2)$	$Err(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$5.71 \pm 0.03e^{-03}$	$5.71 \pm 0.03e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$5.71 \pm 0.07e^{-03}$	$5.71 \pm 0.07e^{-03}$	$1.00 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$5.71 \pm 0.05e^{-03}$	$5.71 \pm 0.05e^{-03}$	$1.01 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$5.71 \pm 0.08e^{-03}$	$5.71 \pm 0.08e^{-03}$	$1.00 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$1.01 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.01e^{-03}$	$5.72 \pm 0.01e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$5.71 \pm 0.08e^{-03}$	$5.71 \pm 0.08e^{-03}$	$1.00 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$5.71 \pm 0.09e^{-03}$	$5.71 \pm 0.09e^{-03}$	$1.00 \pm 0.02e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$5.71 \pm 0.04e^{-03}$	$5.71 \pm 0.04e^{-03}$	$1.01 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$1.01 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.01e^{-03}$	$5.72 \pm 0.01e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$1.01 \pm 0.01e^{+00}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$8.26 \pm 5.93e^{-03}$	$8.26 \pm 5.93e^{-03}$	$1.45 \pm 1.04e^{+00}$

TABLEAU B.5 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$5.71 \pm 0.03e^{-03}$	$5.31 \pm 0.00e^{-03}$	$9.34 \pm 0.00e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.70 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$5.71 \pm 0.07e^{-03}$	$5.08 \pm 0.27e^{-03}$	$8.94 \pm 0.48e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.70 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$5.71 \pm 0.05e^{-03}$	$5.21 \pm 0.18e^{-03}$	$9.16 \pm 0.31e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.69 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$5.71 \pm 0.08e^{-03}$	$4.62 \pm 0.28e^{-03}$	$8.13 \pm 0.49e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.66 \pm 0.01e^{-03}$	$9.97 \pm 0.01e^{-01}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.69 \pm 0.02e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$4.73 \pm 0.19e^{-03}$	$8.32 \pm 0.33e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.01e^{-03}$	$5.64 \pm 0.04e^{-03}$	$9.92 \pm 0.06e^{-01}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.70 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.00e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$5.71 \pm 0.08e^{-03}$	$4.80 \pm 0.28e^{-03}$	$8.45 \pm 0.49e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.65 \pm 0.00e^{-03}$	$9.95 \pm 0.00e^{-01}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.70 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$5.71 \pm 0.09e^{-03}$	$4.63 \pm 0.29e^{-03}$	$8.15 \pm 0.52e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	<i>nan</i>	<i>nan</i>
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$5.71 \pm 0.04e^{-03}$	$4.92 \pm 0.00e^{-03}$	$8.65 \pm 0.00e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	<i>nan</i>	<i>nan</i>
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.00e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
		15	1	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$4.63 \pm 0.41e^{-03}$	$8.14 \pm 0.72e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.01e^{-03}$	$5.47 \pm 0.00e^{-03}$	$9.62 \pm 0.00e^{-01}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.68 \pm 0.00e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$5.71 \pm 0.06e^{-03}$	$4.82 \pm 0.16e^{-03}$	$8.48 \pm 0.29e^{-01}$
			2	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.68 \pm 0.01e^{-03}$	$9.99 \pm 0.01e^{-01}$
			3	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.69 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			4	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.71 \pm 0.01e^{-03}$	$1.00 \pm 0.00e^{+00}$
			9	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
			24	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$5.72 \pm 0.00e^{-03}$	$1.01 \pm 0.00e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$8.26 \pm 5.93e^{-03}$	$1.72 \pm 0.75e^{-02}$	$3.02 \pm 1.32e^{+00}$

TABLEAU B.6 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 1 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

B.3 Jeu de paramètres n° 2

N	méthode	k	m	$\bar{B}(\mathcal{S}_1)$	$\bar{B}(\mathcal{S}_2)$	$\bar{B}(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	1.000	0.913	0.913
			2	1.000	0.756	0.756
			3	1.000	0.930	0.930
			4	1.000	0.980	0.980
		10	1	1.000	0.926	0.926
			2	1.000	0.800	0.800
			3	1.000	0.936	0.936
			4	1.000	0.989	0.989
		15	1	1.000	0.913	0.913
			2	1.000	0.805	0.805
			3	1.000	0.957	0.957
			4	1.000	0.990	0.990
	K-medoids	5	1	1.000	0.863	0.863
			2	1.000	0.688	0.688
			3	1.000	0.885	0.885
			4	1.000	0.960	0.960
		10	1	1.000	0.899	0.899
			2	1.000	0.771	0.771
			3	1.000	0.927	0.927
			4	1.000	0.987	0.987
		15	1	1.000	0.885	0.885
			2	1.000	0.794	0.794
			3	1.000	0.912	0.912
			4	1.000	0.985	0.985
	agglomerative	5	1	1.000	0.857	0.857
			2	1.000	0.681	0.681
			3	1.000	0.851	0.851
			4	1.000	0.971	0.971
		10	1	1.000	0.905	0.905
			2	1.000	0.756	0.756
			3	1.000	0.929	0.929
			4	1.000	0.984	0.984
		15	1	1.000	0.896	0.896
			2	1.000	0.781	0.781
			3	1.000	0.928	0.928
			4	1.000	0.979	0.979
	DBSCAN	$\emptyset$	1	1.000	0.890	0.890
			2	1.000	0.814	0.814
			3	1.000	0.951	0.951
			4	1.000	0.982	0.982
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	1.000	0.746	0.746

TABLEAU B.7 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err(S_1)$	$Err(S_2)$	$Err(S)$
50	K-means	5	1	$2.11 \pm 0.59e^{-02}$	$2.11 \pm 0.59e^{-02}$	$7.66 \pm 2.13e^{-01}$
			2	$2.39 \pm 0.55e^{-02}$	$2.39 \pm 0.55e^{-02}$	$8.66 \pm 2.02e^{-01}$
			3	$2.43 \pm 0.42e^{-02}$	$2.43 \pm 0.42e^{-02}$	$8.83 \pm 1.51e^{-01}$
			4	$2.40 \pm 0.44e^{-02}$	$2.40 \pm 0.44e^{-02}$	$8.71 \pm 1.61e^{-01}$
		10	1	$2.13 \pm 0.54e^{-02}$	$2.13 \pm 0.54e^{-02}$	$7.72 \pm 1.97e^{-01}$
			2	$2.37 \pm 0.52e^{-02}$	$2.37 \pm 0.52e^{-02}$	$8.62 \pm 1.90e^{-01}$
			3	$2.41 \pm 0.43e^{-02}$	$2.41 \pm 0.43e^{-02}$	$8.73 \pm 1.57e^{-01}$
			4	$2.39 \pm 0.37e^{-02}$	$2.39 \pm 0.37e^{-02}$	$8.68 \pm 1.35e^{-01}$
		15	1	$2.12 \pm 0.57e^{-02}$	$2.12 \pm 0.57e^{-02}$	$7.69 \pm 2.06e^{-01}$
			2	$2.36 \pm 0.51e^{-02}$	$2.36 \pm 0.51e^{-02}$	$8.57 \pm 1.87e^{-01}$
			3	$2.40 \pm 0.40e^{-02}$	$2.40 \pm 0.40e^{-02}$	$8.72 \pm 1.47e^{-01}$
			4	$2.35 \pm 0.41e^{-02}$	$2.35 \pm 0.41e^{-02}$	$8.54 \pm 1.50e^{-01}$
	2	$2.42 \pm 0.55e^{-02}$	$2.42 \pm 0.55e^{-02}$	$8.78 \pm 1.98e^{-01}$		
	3	$2.39 \pm 0.49e^{-02}$	$2.39 \pm 0.49e^{-02}$	$8.66 \pm 1.76e^{-01}$		
	4	$2.41 \pm 0.47e^{-02}$	$2.41 \pm 0.47e^{-02}$	$8.76 \pm 1.69e^{-01}$		
	10	1	$2.12 \pm 0.60e^{-02}$	$2.12 \pm 0.60e^{-02}$	$7.70 \pm 2.18e^{-01}$	
		2	$2.38 \pm 0.51e^{-02}$	$2.38 \pm 0.51e^{-02}$	$8.65 \pm 1.85e^{-01}$	
		3	$2.42 \pm 0.42e^{-02}$	$2.42 \pm 0.42e^{-02}$	$8.79 \pm 1.52e^{-01}$	
		4	$2.40 \pm 0.40e^{-02}$	$2.40 \pm 0.40e^{-02}$	$8.70 \pm 1.45e^{-01}$	
	15	1	$2.11 \pm 0.58e^{-02}$	$2.11 \pm 0.58e^{-02}$	$7.67 \pm 2.12e^{-01}$	
		2	$2.35 \pm 0.51e^{-02}$	$2.35 \pm 0.51e^{-02}$	$8.53 \pm 1.86e^{-01}$	
		3	$2.40 \pm 0.47e^{-02}$	$2.40 \pm 0.47e^{-02}$	$8.70 \pm 1.69e^{-01}$	
		4	$2.39 \pm 0.40e^{-02}$	$2.39 \pm 0.40e^{-02}$	$8.69 \pm 1.47e^{-01}$	
	2	$2.39 \pm 0.56e^{-02}$	$2.39 \pm 0.56e^{-02}$	$8.67 \pm 2.03e^{-01}$		
	3	$2.42 \pm 0.47e^{-02}$	$2.42 \pm 0.47e^{-02}$	$8.78 \pm 1.70e^{-01}$		
	4	$2.43 \pm 0.45e^{-02}$	$2.43 \pm 0.45e^{-02}$	$8.81 \pm 1.62e^{-01}$		
	10	1	$2.11 \pm 0.59e^{-02}$	$2.11 \pm 0.59e^{-02}$	$7.64 \pm 2.15e^{-01}$	
		2	$2.36 \pm 0.53e^{-02}$	$2.36 \pm 0.53e^{-02}$	$8.57 \pm 1.91e^{-01}$	
		3	$2.40 \pm 0.42e^{-02}$	$2.40 \pm 0.42e^{-02}$	$8.71 \pm 1.53e^{-01}$	
		4	$2.38 \pm 0.42e^{-02}$	$2.38 \pm 0.42e^{-02}$	$8.64 \pm 1.51e^{-01}$	
	15	1	$2.12 \pm 0.59e^{-02}$	$2.12 \pm 0.59e^{-02}$	$7.69 \pm 2.13e^{-01}$	
		2	$2.37 \pm 0.51e^{-02}$	$2.37 \pm 0.51e^{-02}$	$8.58 \pm 1.84e^{-01}$	
		3	$2.39 \pm 0.43e^{-02}$	$2.39 \pm 0.43e^{-02}$	$8.67 \pm 1.55e^{-01}$	
		4	$2.39 \pm 0.39e^{-02}$	$2.39 \pm 0.39e^{-02}$	$8.66 \pm 1.41e^{-01}$	
	2	$2.36 \pm 0.49e^{-02}$	$2.36 \pm 0.49e^{-02}$	$8.56 \pm 1.77e^{-01}$		
	3	$2.37 \pm 0.46e^{-02}$	$2.37 \pm 0.46e^{-02}$	$8.61 \pm 1.67e^{-01}$		
	4	$2.40 \pm 0.43e^{-02}$	$2.40 \pm 0.43e^{-02}$	$8.71 \pm 1.56e^{-01}$		
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.92 \pm 1.31e^{-02}$	$1.92 \pm 1.31e^{-02}$	$6.95 \pm 4.76e^{-01}$

TABLEAU B.8 – Résultats issus du jeu de paramètres n°2 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$2.11 \pm 0.59e^{-02}$	$2.04 \pm 0.57e^{-02}$	$7.41 \pm 2.05e^{-01}$
			2	$2.39 \pm 0.55e^{-02}$	$2.24 \pm 0.57e^{-02}$	$8.13 \pm 2.06e^{-01}$
			3	$2.43 \pm 0.42e^{-02}$	$2.40 \pm 0.42e^{-02}$	$8.72 \pm 1.50e^{-01}$
			4	$2.40 \pm 0.44e^{-02}$	$2.39 \pm 0.44e^{-02}$	$8.67 \pm 1.61e^{-01}$
		10	1	$2.13 \pm 0.54e^{-02}$	$2.07 \pm 0.53e^{-02}$	$7.52 \pm 1.91e^{-01}$
			2	$2.37 \pm 0.52e^{-02}$	$2.26 \pm 0.53e^{-02}$	$8.20 \pm 1.91e^{-01}$
			3	$2.41 \pm 0.43e^{-02}$	$2.38 \pm 0.43e^{-02}$	$8.62 \pm 1.56e^{-01}$
			4	$2.39 \pm 0.37e^{-02}$	$2.39 \pm 0.37e^{-02}$	$8.66 \pm 1.34e^{-01}$
		15	1	$2.12 \pm 0.57e^{-02}$	$2.05 \pm 0.55e^{-02}$	$7.44 \pm 1.98e^{-01}$
			2	$2.36 \pm 0.51e^{-02}$	$2.25 \pm 0.51e^{-02}$	$8.16 \pm 1.85e^{-01}$
			3	$2.40 \pm 0.40e^{-02}$	$2.38 \pm 0.40e^{-02}$	$8.65 \pm 1.46e^{-01}$
			4	$2.35 \pm 0.41e^{-02}$	$2.35 \pm 0.41e^{-02}$	$8.53 \pm 1.50e^{-01}$
	K-medoids	5	1	$2.15 \pm 0.60e^{-02}$	$2.04 \pm 0.57e^{-02}$	$7.41 \pm 2.09e^{-01}$
			2	$2.42 \pm 0.55e^{-02}$	$2.23 \pm 0.57e^{-02}$	$8.09 \pm 2.05e^{-01}$
			3	$2.39 \pm 0.49e^{-02}$	$2.33 \pm 0.49e^{-02}$	$8.44 \pm 1.76e^{-01}$
			4	$2.41 \pm 0.47e^{-02}$	$2.40 \pm 0.47e^{-02}$	$8.69 \pm 1.69e^{-01}$
		10	1	$2.12 \pm 0.60e^{-02}$	$2.04 \pm 0.58e^{-02}$	$7.41 \pm 2.11e^{-01}$
			2	$2.38 \pm 0.51e^{-02}$	$2.25 \pm 0.51e^{-02}$	$8.16 \pm 1.84e^{-01}$
			3	$2.42 \pm 0.42e^{-02}$	$2.39 \pm 0.42e^{-02}$	$8.67 \pm 1.52e^{-01}$
			4	$2.40 \pm 0.40e^{-02}$	$2.39 \pm 0.40e^{-02}$	$8.68 \pm 1.44e^{-01}$
		15	1	$2.11 \pm 0.58e^{-02}$	$2.02 \pm 0.56e^{-02}$	$7.33 \pm 2.02e^{-01}$
			2	$2.35 \pm 0.51e^{-02}$	$2.22 \pm 0.50e^{-02}$	$8.07 \pm 1.82e^{-01}$
			3	$2.40 \pm 0.47e^{-02}$	$2.36 \pm 0.47e^{-02}$	$8.55 \pm 1.69e^{-01}$
			4	$2.39 \pm 0.40e^{-02}$	$2.39 \pm 0.40e^{-02}$	$8.66 \pm 1.47e^{-01}$
	agglomerative	5	1	$2.19 \pm 0.57e^{-02}$	$2.09 \pm 0.55e^{-02}$	$7.57 \pm 1.98e^{-01}$
			2	$2.39 \pm 0.56e^{-02}$	$2.18 \pm 0.57e^{-02}$	$7.91 \pm 2.06e^{-01}$
			3	$2.42 \pm 0.47e^{-02}$	$2.35 \pm 0.47e^{-02}$	$8.51 \pm 1.71e^{-01}$
			4	$2.43 \pm 0.45e^{-02}$	$2.41 \pm 0.45e^{-02}$	$8.76 \pm 1.62e^{-01}$
		10	1	$2.11 \pm 0.59e^{-02}$	$2.03 \pm 0.57e^{-02}$	$7.36 \pm 2.07e^{-01}$
			2	$2.36 \pm 0.53e^{-02}$	$2.21 \pm 0.52e^{-02}$	$8.01 \pm 1.88e^{-01}$
			3	$2.40 \pm 0.42e^{-02}$	$2.37 \pm 0.42e^{-02}$	$8.59 \pm 1.52e^{-01}$
			4	$2.38 \pm 0.42e^{-02}$	$2.37 \pm 0.42e^{-02}$	$8.61 \pm 1.51e^{-01}$
		15	1	$2.12 \pm 0.59e^{-02}$	$2.04 \pm 0.57e^{-02}$	$7.39 \pm 2.05e^{-01}$
			2	$2.37 \pm 0.51e^{-02}$	$2.23 \pm 0.50e^{-02}$	$8.10 \pm 1.81e^{-01}$
			3	$2.39 \pm 0.43e^{-02}$	$2.36 \pm 0.42e^{-02}$	$8.55 \pm 1.54e^{-01}$
			4	$2.39 \pm 0.39e^{-02}$	$2.38 \pm 0.39e^{-02}$	$8.62 \pm 1.41e^{-01}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$2.12 \pm 0.57e^{-02}$	$2.03 \pm 0.55e^{-02}$	$7.38 \pm 1.98e^{-01}$
			2	$2.36 \pm 0.49e^{-02}$	$2.25 \pm 0.48e^{-02}$	$8.17 \pm 1.73e^{-01}$
			3	$2.37 \pm 0.46e^{-02}$	$2.35 \pm 0.46e^{-02}$	$8.52 \pm 1.67e^{-01}$
			4	$2.40 \pm 0.43e^{-02}$	$2.39 \pm 0.43e^{-02}$	$8.68 \pm 1.56e^{-01}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.92 \pm 1.31e^{-02}$	$1.60 \pm 1.38e^{-02}$	$5.82 \pm 5.02e^{-01}$

TABLEAU B.9 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

B.4 Jeu de paramètres n° 3

N	méthode	k	m	$\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_1)$	$\bar{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_2)$	$\bar{\mathcal{B}}(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	0.152	1.000	0.152
			2	0.116	1.000	0.116
			3	0.095	1.000	0.095
			4	0.092	1.000	0.092
		10	1	0.231	1.000	0.231
			2	0.271	1.000	0.271
			3	0.295	1.000	0.295
			4	0.255	1.000	0.255
		15	1	0.204	1.000	0.204
			2	0.319	1.000	0.319
			3	0.297	1.000	0.297
			4	0.319	1.000	0.319
	K-medoids	5	1	0.182	1.000	0.182
			2	0.141	1.000	0.141
			3	0.127	1.000	0.127
			4	0.124	1.000	0.124
		10	1	0.200	1.000	0.200
			2	0.237	1.000	0.237
			3	0.249	1.000	0.249
			4	0.273	1.000	0.273
		15	1	0.211	1.000	0.211
			2	0.240	1.000	0.240
			3	0.288	1.000	0.288
			4	0.316	1.000	0.316
	agglomerative	5	1	0.160	1.000	0.160
			2	0.140	1.000	0.140
			3	0.110	1.000	0.110
			4	0.101	1.000	0.101
		10	1	0.242	1.000	0.242
			2	0.261	1.000	0.261
			3	0.266	1.000	0.266
			4	0.251	1.000	0.251
		15	1	0.225	1.000	0.225
			2	0.267	1.000	0.267
			3	0.275	1.000	0.275
			4	0.324	1.000	0.324
	DBSCAN	$\emptyset$	1	0.212	1.000	0.212
			2	0.282	1.000	0.282
			3	0.334	1.000	0.334
			4	0.347	1.000	0.347
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	0.043	1.000	0.043

TABLEAU B.10 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 2 des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err(\mathcal{S}_1)$	$Err(\mathcal{S}_2)$	$Err(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$2.31 \pm 5.20e^{-03}$	$2.31 \pm 5.20e^{-03}$	$2.53 \pm 5.71e^{+00}$
			2	$1.87 \pm 4.94e^{-03}$	$1.87 \pm 4.94e^{-03}$	$2.06 \pm 5.43e^{+00}$
			3	$1.67 \pm 4.90e^{-03}$	$1.67 \pm 4.90e^{-03}$	$1.83 \pm 5.37e^{+00}$
			4	$1.66 \pm 4.61e^{-03}$	$1.66 \pm 4.61e^{-03}$	$1.82 \pm 5.06e^{+00}$
		10	1	$2.77 \pm 5.34e^{-03}$	$2.77 \pm 5.34e^{-03}$	$3.05 \pm 5.86e^{+00}$
			2	$2.41 \pm 4.55e^{-03}$	$2.41 \pm 4.55e^{-03}$	$2.65 \pm 4.99e^{+00}$
			3	$2.41 \pm 4.95e^{-03}$	$2.41 \pm 4.95e^{-03}$	$2.65 \pm 5.43e^{+00}$
			4	$2.39 \pm 5.25e^{-03}$	$2.39 \pm 5.25e^{-03}$	$2.63 \pm 5.77e^{+00}$
		15	1	$2.62 \pm 4.39e^{-03}$	$2.62 \pm 4.39e^{-03}$	$2.87 \pm 4.82e^{+00}$
			2	$2.93 \pm 4.99e^{-03}$	$2.93 \pm 4.99e^{-03}$	$3.21 \pm 5.47e^{+00}$
			3	$2.25 \pm 3.74e^{-03}$	$2.25 \pm 3.74e^{-03}$	$2.47 \pm 4.10e^{+00}$
			4	$2.59 \pm 4.97e^{-03}$	$2.59 \pm 4.97e^{-03}$	$2.84 \pm 5.45e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$2.22 \pm 4.40e^{-03}$	$2.22 \pm 4.40e^{-03}$	$2.43 \pm 4.83e^{+00}$
			2	$1.94 \pm 4.76e^{-03}$	$1.94 \pm 4.76e^{-03}$	$2.13 \pm 5.23e^{+00}$
			3	$1.70 \pm 3.56e^{-03}$	$1.70 \pm 3.56e^{-03}$	$1.87 \pm 3.90e^{+00}$
			4	$1.96 \pm 5.28e^{-03}$	$1.96 \pm 5.28e^{-03}$	$2.15 \pm 5.80e^{+00}$
		10	1	$2.37 \pm 4.39e^{-03}$	$2.37 \pm 4.39e^{-03}$	$2.60 \pm 4.82e^{+00}$
			2	$2.49 \pm 5.37e^{-03}$	$2.49 \pm 5.37e^{-03}$	$2.74 \pm 5.90e^{+00}$
			3	$2.28 \pm 5.12e^{-03}$	$2.28 \pm 5.12e^{-03}$	$2.50 \pm 5.62e^{+00}$
			4	$2.87 \pm 7.54e^{-03}$	$2.87 \pm 7.54e^{-03}$	$3.15 \pm 8.28e^{+00}$
		15	1	$3.02 \pm 5.58e^{-03}$	$3.02 \pm 5.58e^{-03}$	$3.32 \pm 6.13e^{+00}$
			2	$2.18 \pm 3.51e^{-03}$	$2.18 \pm 3.51e^{-03}$	$2.39 \pm 3.85e^{+00}$
			3	$2.42 \pm 4.94e^{-03}$	$2.42 \pm 4.94e^{-03}$	$2.66 \pm 5.43e^{+00}$
			4	$2.71 \pm 5.59e^{-03}$	$2.71 \pm 5.59e^{-03}$	$2.98 \pm 6.14e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$1.98 \pm 3.48e^{-03}$	$1.98 \pm 3.48e^{-03}$	$2.18 \pm 3.82e^{+00}$
			2	$1.91 \pm 4.76e^{-03}$	$1.91 \pm 4.76e^{-03}$	$2.09 \pm 5.22e^{+00}$
			3	$1.68 \pm 3.56e^{-03}$	$1.68 \pm 3.56e^{-03}$	$1.84 \pm 3.91e^{+00}$
			4	$1.49 \pm 3.30e^{-03}$	$1.49 \pm 3.30e^{-03}$	$1.63 \pm 3.62e^{+00}$
		10	1	$2.90 \pm 4.82e^{-03}$	$2.90 \pm 4.82e^{-03}$	$3.19 \pm 5.29e^{+00}$
			2	$2.21 \pm 3.88e^{-03}$	$2.21 \pm 3.88e^{-03}$	$2.43 \pm 4.26e^{+00}$
			3	$2.24 \pm 4.56e^{-03}$	$2.24 \pm 4.56e^{-03}$	$2.46 \pm 5.00e^{+00}$
			4	$2.23 \pm 4.91e^{-03}$	$2.23 \pm 4.91e^{-03}$	$2.45 \pm 5.38e^{+00}$
		15	1	$2.95 \pm 4.70e^{-03}$	$2.95 \pm 4.70e^{-03}$	$3.24 \pm 5.15e^{+00}$
			2	$2.77 \pm 5.81e^{-03}$	$2.77 \pm 5.81e^{-03}$	$3.04 \pm 6.37e^{+00}$
			3	$2.38 \pm 4.05e^{-03}$	$2.38 \pm 4.05e^{-03}$	$2.62 \pm 4.45e^{+00}$
			4	$2.45 \pm 4.48e^{-03}$	$2.45 \pm 4.48e^{-03}$	$2.69 \pm 4.92e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$3.09 \pm 4.94e^{-03}$	$3.09 \pm 4.94e^{-03}$	$3.39 \pm 5.42e^{+00}$
			2	$2.61 \pm 3.91e^{-03}$	$2.61 \pm 3.91e^{-03}$	$2.87 \pm 4.29e^{+00}$
			3	$2.73 \pm 5.18e^{-03}$	$2.73 \pm 5.18e^{-03}$	$3.00 \pm 5.69e^{+00}$
			4	$2.64 \pm 5.72e^{-03}$	$2.64 \pm 5.72e^{-03}$	$2.90 \pm 6.27e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.75 \pm 4.11e^{-03}$	$1.75 \pm 4.11e^{-03}$	$1.92 \pm 4.51e^{+00}$

TABLEAU B.11 – Résultats issus du jeu de paramètres n° 3 des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

N	méthode	k	m	$Err'(\mathcal{S}_1)$	$Err'(\mathcal{S}_2)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	K-means	5	1	$1.01 \pm 1.03e^{-02}$	$2.31 \pm 5.20e^{-03}$	$1.11 \pm 1.13e^{+01}$
			2	$9.21 \pm 12.20e^{-03}$	$1.87 \pm 4.94e^{-03}$	$1.01 \pm 1.34e^{+01}$
			3	$8.84 \pm 14.00e^{-03}$	$1.67 \pm 4.90e^{-03}$	$9.70 \pm 15.30e^{+00}$
			4	$9.02 \pm 13.10e^{-03}$	$1.66 \pm 4.61e^{-03}$	$9.90 \pm 14.40e^{+00}$
		10	1	$8.98 \pm 8.57e^{-03}$	$2.77 \pm 5.34e^{-03}$	$9.85 \pm 9.41e^{+00}$
			2	$6.44 \pm 7.35e^{-03}$	$2.41 \pm 4.55e^{-03}$	$7.07 \pm 8.07e^{+00}$
			3	$6.00 \pm 8.05e^{-03}$	$2.41 \pm 4.95e^{-03}$	$6.58 \pm 8.83e^{+00}$
			4	$6.73 \pm 9.12e^{-03}$	$2.39 \pm 5.25e^{-03}$	$7.38 \pm 10.00e^{+00}$
		15	1	$9.27 \pm 6.25e^{-03}$	$2.62 \pm 4.39e^{-03}$	$1.02 \pm 0.69e^{+01}$
			2	$7.23 \pm 7.13e^{-03}$	$2.93 \pm 4.99e^{-03}$	$7.94 \pm 7.82e^{+00}$
			3	$5.41 \pm 5.73e^{-03}$	$2.25 \pm 3.74e^{-03}$	$5.94 \pm 6.28e^{+00}$
			4	$6.16 \pm 7.66e^{-03}$	$2.59 \pm 4.97e^{-03}$	$6.76 \pm 8.40e^{+00}$
	K-medoids	5	1	$8.08 \pm 8.01e^{-03}$	$2.22 \pm 4.40e^{-03}$	$8.86 \pm 8.79e^{+00}$
			2	$8.20 \pm 10.70e^{-03}$	$1.94 \pm 4.76e^{-03}$	$9.00 \pm 11.80e^{+00}$
			3	$7.11 \pm 8.12e^{-03}$	$1.70 \pm 3.56e^{-03}$	$7.80 \pm 8.91e^{+00}$
			4	$9.38 \pm 12.70e^{-03}$	$1.96 \pm 5.28e^{-03}$	$1.03 \pm 1.40e^{+01}$
		10	1	$8.19 \pm 7.34e^{-03}$	$2.37 \pm 4.39e^{-03}$	$8.99 \pm 8.06e^{+00}$
			2	$7.58 \pm 9.37e^{-03}$	$2.49 \pm 5.37e^{-03}$	$8.32 \pm 10.30e^{+00}$
			3	$6.40 \pm 9.08e^{-03}$	$2.28 \pm 5.12e^{-03}$	$7.03 \pm 9.97e^{+00}$
			4	$8.09 \pm 13.10e^{-03}$	$2.87 \pm 7.54e^{-03}$	$8.88 \pm 14.30e^{+00}$
		15	1	$1.09 \pm 0.83e^{-02}$	$3.02 \pm 5.58e^{-03}$	$1.20 \pm 0.91e^{+01}$
			2	$6.18 \pm 5.49e^{-03}$	$2.18 \pm 3.51e^{-03}$	$6.79 \pm 6.02e^{+00}$
			3	$6.14 \pm 8.08e^{-03}$	$2.42 \pm 4.94e^{-03}$	$6.74 \pm 8.87e^{+00}$
			4	$6.61 \pm 8.75e^{-03}$	$2.71 \pm 5.59e^{-03}$	$7.25 \pm 9.61e^{+00}$
	agglomerative	5	1	$7.59 \pm 6.19e^{-03}$	$1.98 \pm 3.48e^{-03}$	$8.33 \pm 6.79e^{+00}$
			2	$8.00 \pm 10.90e^{-03}$	$1.91 \pm 4.76e^{-03}$	$8.78 \pm 11.90e^{+00}$
			3	$7.84 \pm 8.50e^{-03}$	$1.68 \pm 3.56e^{-03}$	$8.60 \pm 9.33e^{+00}$
			4	$6.62 \pm 8.85e^{-03}$	$1.49 \pm 3.30e^{-03}$	$7.26 \pm 9.71e^{+00}$
		10	1	$9.12 \pm 6.70e^{-03}$	$2.90 \pm 4.82e^{-03}$	$1.00 \pm 0.73e^{+01}$
			2	$5.90 \pm 6.27e^{-03}$	$2.21 \pm 3.88e^{-03}$	$6.48 \pm 6.88e^{+00}$
			3	$5.91 \pm 7.73e^{-03}$	$2.24 \pm 4.56e^{-03}$	$6.48 \pm 8.49e^{+00}$
			4	$6.17 \pm 8.68e^{-03}$	$2.23 \pm 4.91e^{-03}$	$6.77 \pm 9.53e^{+00}$
		15	1	$9.95 \pm 5.88e^{-03}$	$2.95 \pm 4.70e^{-03}$	$1.09 \pm 0.65e^{+01}$
			2	$7.90 \pm 9.52e^{-03}$	$2.77 \pm 5.81e^{-03}$	$8.67 \pm 10.40e^{+00}$
			3	$6.28 \pm 6.24e^{-03}$	$2.38 \pm 4.05e^{-03}$	$6.89 \pm 6.84e^{+00}$
			4	$5.65 \pm 6.84e^{-03}$	$2.45 \pm 4.48e^{-03}$	$6.20 \pm 7.51e^{+00}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$1.12 \pm 0.57e^{-02}$	$3.09 \pm 4.94e^{-03}$	$1.23 \pm 0.62e^{+01}$
			2	$6.96 \pm 5.30e^{-03}$	$2.61 \pm 3.91e^{-03}$	$7.64 \pm 5.82e^{+00}$
			3	$6.36 \pm 7.79e^{-03}$	$2.73 \pm 5.18e^{-03}$	$6.98 \pm 8.55e^{+00}$
			4	$5.90 \pm 8.83e^{-03}$	$2.64 \pm 5.72e^{-03}$	$6.48 \pm 9.69e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$2.05 \pm 0.51e^{-02}$	$1.75 \pm 4.11e^{-03}$	$2.25 \pm 0.56e^{+01}$

TABLEAU B.12 – Résultats issus du jeu de paramètres n°3 des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ et $\mathbb{S}$ du modèle de virus

Résultats du modèle de transport

N	méthode	k	m	$\bar{B}(S_1)$	$\bar{B}(S_2)$	$\bar{B}(S_3)$	$\bar{B}(S_4)$	$\bar{B}(S_5)$	$\bar{B}(S_6)$	$\bar{B}(S_7)$	$\bar{B}(S_8)$	$\bar{B}_2(S)$
50	K-means	5	1	0.272	0.008	0.204	0.078	0.010	0.018	0.063	0.267	0.224
			2	0.244	0.010	0.176	0.071	0.018	0.015	0.053	0.247	0.207
			3	0.259	0.013	0.161	0.043	0.010	0.015	0.048	0.270	0.186
			4	0.242	0.008	0.194	0.058	0.015	0.015	0.065	0.214	0.186
		10	1	0.254	0.004	0.194	0.076	0.014	0.018	0.074	0.296	0.236
			2	0.202	0.014	0.154	0.092	0.008	0.034	0.084	0.500	0.282
			3	0.176	0.020	0.120	0.090	0.006	0.048	0.114	0.552	0.294
			4	0.134	0.010	0.066	0.112	0.012	0.062	0.088	0.620	0.266
		15	1	0.284	0.012	0.178	0.054	0.004	0.014	0.064	0.256	0.208
			2	0.332	0.012	0.232	0.056	0.010	0.026	0.066	0.382	0.300
			3	0.314	0.010	0.196	0.060	0.010	0.034	0.056	0.492	0.316
			4	0.290	0.010	0.190	0.068	0.008	0.032	0.064	0.556	0.336
	K-medoids	5	1	0.224	0.013	0.141	0.083	0.020	0.028	0.063	0.332	0.214
			2	0.174	0.015	0.103	0.126	0.018	0.035	0.113	0.474	0.275
			3	0.118	0.015	0.076	0.096	0.008	0.081	0.121	0.539	0.244
			4	0.103	0.010	0.083	0.083	0.018	0.068	0.088	0.637	0.257
		10	1	0.156	0.012	0.114	0.110	0.016	0.028	0.088	0.376	0.224
			2	0.124	0.014	0.078	0.100	0.018	0.050	0.110	0.490	0.240
			3	0.086	0.024	0.072	0.138	0.020	0.058	0.148	0.714	0.362
			4	0.064	0.016	0.064	0.146	0.018	0.058	0.178	0.739	0.351
		15	1	0.274	0.004	0.228	0.086	0.006	0.010	0.074	0.278	0.230
			2	0.312	0.012	0.234	0.056	0.006	0.020	0.044	0.320	0.276
			3	0.314	0.016	0.246	0.066	0.006	0.040	0.064	0.404	0.312
			4	0.334	0.012	0.266	0.056	0.010	0.022	0.050	0.480	0.318
	agglomerative	5	1	0.275	0.000	0.179	0.060	0.003	0.018	0.053	0.297	0.199
			2	0.214	0.018	0.151	0.068	0.015	0.018	0.096	0.315	0.232
			3	0.254	0.005	0.156	0.060	0.008	0.033	0.058	0.290	0.212
			4	0.179	0.008	0.161	0.083	0.020	0.018	0.073	0.275	0.181
		10	1	0.228	0.006	0.160	0.076	0.016	0.012	0.080	0.314	0.218
			2	0.218	0.014	0.126	0.084	0.014	0.038	0.088	0.456	0.258
			3	0.148	0.002	0.104	0.104	0.008	0.030	0.080	0.474	0.206
			4	0.148	0.016	0.096	0.092	0.014	0.050	0.124	0.560	0.270
		15	1	0.262	0.016	0.198	0.078	0.002	0.016	0.084	0.276	0.226
			2	0.322	0.010	0.230	0.072	0.002	0.020	0.056	0.376	0.270
			3	0.298	0.004	0.214	0.056	0.014	0.030	0.068	0.422	0.284
			4	0.304	0.012	0.262	0.064	0.014	0.038	0.068	0.536	0.380
	DBSCAN	∅	1	0.284	0.008	0.202	0.048	0.016	0.036	0.080	0.432	0.302
			2	0.320	0.006	0.244	0.040	0.016	0.046	0.046	0.580	0.372
			3	0.346	0.004	0.260	0.042	0.012	0.054	0.044	0.618	0.430
			4	0.380	0.008	0.262	0.050	0.004	0.070	0.024	0.606	0.416
	MC	∅	∅	0.268	0.022	0.198	0.054	0.012	0.012	0.046	0.182	0.162

TABLEAU C.1 – Résultats des taux de détection pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ du modèle de transport

N	méthode	k	m	$Err(S_1)$	$Err(S_2)$	$Err(S_3)$	$Err(S_4)$
50	K-means	5	1	$1.13 \pm 1.05e^{-02}$	$2.96 \pm 11.80e^{-04}$	$8.72 \pm 9.33e^{-03}$	$1.80 \pm 2.95e^{-03}$
			2	$1.36 \pm 1.47e^{-02}$	$2.69 \pm 4.85e^{-04}$	$1.04 \pm 1.47e^{-02}$	$1.61 \pm 2.51e^{-03}$
			3	$1.52 \pm 1.85e^{-02}$	$3.06 \pm 7.43e^{-04}$	$9.93 \pm 13.60e^{-03}$	$1.58 \pm 4.64e^{-03}$
			4	$1.72 \pm 2.51e^{-02}$	$2.31 \pm 0.43e^{-04}$	$1.35 \pm 2.15e^{-02}$	$1.47 \pm 2.64e^{-03}$
		10	1	$1.25 \pm 1.41e^{-02}$	$3.31 \pm 16.60e^{-04}$	$9.02 \pm 11.50e^{-03}$	$1.93 \pm 3.43e^{-03}$
			2	$1.39 \pm 1.85e^{-02}$	$4.21 \pm 23.80e^{-04}$	$9.95 \pm 14.40e^{-03}$	$1.59 \pm 3.06e^{-03}$
			3	$1.43 \pm 1.95e^{-02}$	$5.65 \pm 44.90e^{-04}$	$1.13 \pm 2.12e^{-02}$	$1.85 \pm 3.91e^{-03}$
			4	$1.53 \pm 2.51e^{-02}$	$3.07 \pm 9.06e^{-04}$	$8.86 \pm 17.70e^{-03}$	$1.65 \pm 3.05e^{-03}$
		15	1	$9.66 \pm 8.79e^{-03}$	$5.10 \pm 27.70e^{-04}$	$7.20 \pm 7.71e^{-03}$	$2.02 \pm 5.38e^{-03}$
			2	$9.63 \pm 8.86e^{-03}$	$3.99 \pm 17.80e^{-04}$	$7.22 \pm 7.56e^{-03}$	$2.07 \pm 4.57e^{-03}$
			3	$9.28 \pm 8.86e^{-03}$	$4.87 \pm 29.70e^{-04}$	$6.89 \pm 6.97e^{-03}$	$2.25 \pm 5.66e^{-03}$
			4	$8.93 \pm 7.60e^{-03}$	$4.85 \pm 26.80e^{-04}$	$7.04 \pm 9.97e^{-03}$	$2.61 \pm 6.62e^{-03}$
	K-medoids	5	1	$1.26 \pm 1.61e^{-02}$	$3.39 \pm 11.20e^{-04}$	$9.66 \pm 14.20e^{-03}$	$1.65 \pm 3.89e^{-03}$
			2	$1.52 \pm 2.23e^{-02}$	$3.02 \pm 8.99e^{-04}$	$9.35 \pm 15.30e^{-03}$	$2.08 \pm 5.59e^{-03}$
			3	$1.44 \pm 2.36e^{-02}$	$2.69 \pm 4.37e^{-04}$	$9.41 \pm 17.40e^{-03}$	$1.52 \pm 2.41e^{-03}$
			4	$1.37 \pm 2.13e^{-02}$	$5.54 \pm 47.70e^{-04}$	$1.08 \pm 2.09e^{-02}$	$1.69 \pm 5.24e^{-03}$
		10	1	$1.13 \pm 1.54e^{-02}$	$3.35 \pm 10.80e^{-04}$	$8.98 \pm 16.40e^{-03}$	$2.13 \pm 4.25e^{-03}$
			2	$1.28 \pm 2.13e^{-02}$	$3.71 \pm 15.20e^{-04}$	$1.04 \pm 2.38e^{-02}$	$1.92 \pm 4.30e^{-03}$
			3	$1.35 \pm 2.56e^{-02}$	$5.34 \pm 29.70e^{-04}$	$1.02 \pm 2.11e^{-02}$	$2.42 \pm 6.63e^{-03}$
			4	$1.23 \pm 2.34e^{-02}$	$3.39 \pm 12.20e^{-04}$	$1.12 \pm 2.72e^{-02}$	$3.49 \pm 12.10e^{-03}$
		15	1	$9.16 \pm 7.63e^{-03}$	$2.90 \pm 11.90e^{-04}$	$8.12 \pm 8.72e^{-03}$	$2.73 \pm 5.92e^{-03}$
			2	$1.00 \pm 1.06e^{-02}$	$4.63 \pm 25.20e^{-04}$	$7.87 \pm 9.36e^{-03}$	$2.37 \pm 6.27e^{-03}$
			3	$9.73 \pm 9.55e^{-03}$	$5.72 \pm 30.10e^{-04}$	$7.30 \pm 8.51e^{-03}$	$2.47 \pm 5.67e^{-03}$
			4	$9.33 \pm 9.05e^{-03}$	$6.75 \pm 50.40e^{-04}$	$7.24 \pm 7.80e^{-03}$	$2.22 \pm 5.80e^{-03}$
	agglomerative	5	1	$1.21 \pm 1.17e^{-02}$	$2.29 \pm 0.00e^{-04}$	$8.40 \pm 10.20e^{-03}$	$1.84 \pm 3.64e^{-03}$
			2	$1.30 \pm 1.52e^{-02}$	$5.59 \pm 29.10e^{-04}$	$9.01 \pm 11.80e^{-03}$	$1.80 \pm 3.74e^{-03}$
			3	$1.59 \pm 2.01e^{-02}$	$2.83 \pm 7.80e^{-04}$	$9.71 \pm 13.60e^{-03}$	$1.62 \pm 2.72e^{-03}$
			4	$1.29 \pm 1.59e^{-02}$	$3.15 \pm 12.00e^{-04}$	$1.14 \pm 1.83e^{-02}$	$1.34 \pm 1.05e^{-03}$
		10	1	$1.12 \pm 1.19e^{-02}$	$3.86 \pm 22.70e^{-04}$	$8.29 \pm 11.30e^{-03}$	$1.92 \pm 3.84e^{-03}$
			2	$1.36 \pm 1.70e^{-02}$	$3.28 \pm 11.20e^{-04}$	$9.94 \pm 16.40e^{-03}$	$1.96 \pm 5.08e^{-03}$
			3	$1.35 \pm 2.03e^{-02}$	$2.40 \pm 2.58e^{-04}$	$9.85 \pm 18.80e^{-03}$	$1.78 \pm 3.61e^{-03}$
			4	$1.73 \pm 2.95e^{-02}$	$5.48 \pm 32.70e^{-04}$	$1.12 \pm 2.21e^{-02}$	$1.82 \pm 3.84e^{-03}$
		15	1	$9.64 \pm 7.92e^{-03}$	$6.21 \pm 33.30e^{-04}$	$7.67 \pm 7.77e^{-03}$	$2.57 \pm 5.52e^{-03}$
			2	$9.60 \pm 8.18e^{-03}$	$5.07 \pm 28.70e^{-04}$	$7.39 \pm 7.71e^{-03}$	$2.65 \pm 6.17e^{-03}$
			3	$1.00 \pm 0.88e^{-02}$	$3.95 \pm 26.50e^{-04}$	$7.17 \pm 7.19e^{-03}$	$2.26 \pm 5.54e^{-03}$
			4	$9.78 \pm 9.43e^{-03}$	$5.40 \pm 33.70e^{-04}$	$7.43 \pm 8.04e^{-03}$	$2.60 \pm 6.67e^{-03}$
	DBSCAN	∅	1	$1.07 \pm 1.63e^{-02}$	$4.21 \pm 24.40e^{-04}$	$7.19 \pm 13.60e^{-03}$	$2.23 \pm 9.68e^{-03}$
			2	$8.56 \pm 9.52e^{-03}$	$4.18 \pm 31.50e^{-04}$	$7.22 \pm 12.10e^{-03}$	$2.45 \pm 8.42e^{-03}$
			3	$9.10 \pm 11.20e^{-03}$	$4.45 \pm 36.00e^{-04}$	$6.95 \pm 10.40e^{-03}$	$2.62 \pm 10.10e^{-03}$
			4	$9.12 \pm 11.00e^{-03}$	$5.25 \pm 36.50e^{-04}$	$7.12 \pm 10.70e^{-03}$	$2.67 \pm 8.73e^{-03}$
MC	∅	∅	$9.57 \pm 6.35e^{-03}$	$6.59 \pm 28.70e^{-04}$	$7.54 \pm 6.70e^{-03}$	$2.10 \pm 4.00e^{-03}$	

TABLEAU C.2 – Résultats des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ du modèle de transport

N	méthode	k	m	$Err(S_5)$	$Err(S_6)$	$Err(S_7)$	$Err(S_8)$	$Err(S)$
50	K-means	5	1	$3.36 \pm 15.70e^{-04}$	$3.81 \pm 14.20e^{-04}$	$2.16 \pm 3.76e^{-03}$	$5.41 \pm 4.59e^{-03}$	$1.26 \pm 1.26e^{+01}$
			2	$4.07 \pm 19.40e^{-04}$	$3.18 \pm 12.50e^{-04}$	$1.75 \pm 2.21e^{-03}$	$4.66 \pm 3.82e^{-03}$	$1.26 \pm 1.26e^{+01}$
			3	$2.49 \pm 7.64e^{-04}$	$2.83 \pm 6.86e^{-04}$	$1.80 \pm 2.91e^{-03}$	$4.28 \pm 2.15e^{-03}$	$1.18 \pm 1.18e^{+01}$
			4	$2.65 \pm 7.36e^{-04}$	$2.70 \pm 6.85e^{-04}$	$1.65 \pm 1.51e^{-03}$	$4.25 \pm 2.09e^{-03}$	$1.24 \pm 1.24e^{+01}$
		10	1	$3.19 \pm 14.50e^{-04}$	$4.65 \pm 23.50e^{-04}$	$1.89 \pm 2.32e^{-03}$	$4.89 \pm 4.73e^{-03}$	$1.31 \pm 1.31e^{+01}$
			2	$3.02 \pm 15.40e^{-04}$	$3.18 \pm 7.93e^{-04}$	$2.03 \pm 4.26e^{-03}$	$4.48 \pm 4.24e^{-03}$	$1.28 \pm 1.28e^{+01}$
			3	$2.47 \pm 10.80e^{-04}$	$3.14 \pm 7.83e^{-04}$	$2.05 \pm 4.62e^{-03}$	$4.14 \pm 3.72e^{-03}$	$1.36 \pm 1.36e^{+01}$
			4	$2.50 \pm 8.23e^{-04}$	$3.74 \pm 11.30e^{-04}$	$2.01 \pm 4.30e^{-03}$	$4.25 \pm 4.13e^{-03}$	$1.22 \pm 1.22e^{+01}$
		15	1	$2.80 \pm 14.60e^{-04}$	$4.24 \pm 21.70e^{-04}$	$2.65 \pm 5.22e^{-03}$	$5.95 \pm 5.98e^{-03}$	$1.35 \pm 1.35e^{+01}$
			2	$4.78 \pm 34.10e^{-04}$	$4.03 \pm 16.70e^{-04}$	$2.58 \pm 5.31e^{-03}$	$6.10 \pm 6.68e^{-03}$	$1.40 \pm 1.40e^{+01}$
			3	$3.64 \pm 21.20e^{-04}$	$5.44 \pm 25.00e^{-04}$	$2.51 \pm 5.21e^{-03}$	$5.47 \pm 5.99e^{-03}$	$1.43 \pm 1.43e^{+01}$
			4	$3.25 \pm 17.30e^{-04}$	$6.38 \pm 34.40e^{-04}$	$3.27 \pm 9.04e^{-03}$	$5.85 \pm 7.10e^{-03}$	$1.54 \pm 1.54e^{+01}$
	K-medoids	5	1	$3.88 \pm 22.40e^{-04}$	$4.12 \pm 15.40e^{-04}$	$1.87 \pm 2.42e^{-03}$	$5.05 \pm 4.62e^{-03}$	$1.32 \pm 1.32e^{+01}$
			2	$3.38 \pm 14.20e^{-04}$	$2.74 \pm 4.16e^{-04}$	$2.12 \pm 3.60e^{-03}$	$4.56 \pm 4.85e^{-03}$	$1.28 \pm 1.28e^{+01}$
			3	$2.71 \pm 12.00e^{-04}$	$3.77 \pm 9.05e^{-04}$	$1.91 \pm 3.72e^{-03}$	$4.43 \pm 3.97e^{-03}$	$1.20 \pm 1.20e^{+01}$
			4	$4.45 \pm 32.40e^{-04}$	$4.09 \pm 14.10e^{-04}$	$2.14 \pm 5.38e^{-03}$	$4.45 \pm 4.60e^{-03}$	$1.49 \pm 1.49e^{+01}$
		10	1	$3.75 \pm 16.80e^{-04}$	$3.97 \pm 12.90e^{-04}$	$2.02 \pm 3.72e^{-03}$	$4.67 \pm 4.26e^{-03}$	$1.31 \pm 1.31e^{+01}$
			2	$3.74 \pm 21.00e^{-04}$	$4.98 \pm 24.40e^{-04}$	$2.19 \pm 5.15e^{-03}$	$5.01 \pm 6.80e^{-03}$	$1.42 \pm 1.42e^{+01}$
			3	$3.00 \pm 11.60e^{-04}$	$4.71 \pm 25.70e^{-04}$	$2.57 \pm 8.11e^{-03}$	$4.71 \pm 6.25e^{-03}$	$1.51 \pm 1.51e^{+01}$
			4	$4.51 \pm 30.80e^{-04}$	$4.80 \pm 17.40e^{-04}$	$2.50 \pm 5.74e^{-03}$	$5.84 \pm 11.30e^{-03}$	$1.63 \pm 1.63e^{+01}$
		15	1	$3.16 \pm 17.10e^{-04}$	$3.13 \pm 11.20e^{-04}$	$2.79 \pm 5.83e^{-03}$	$6.50 \pm 6.50e^{-03}$	$1.32 \pm 1.32e^{+01}$
			2	$2.52 \pm 8.58e^{-04}$	$4.35 \pm 20.30e^{-04}$	$2.27 \pm 4.85e^{-03}$	$5.93 \pm 6.22e^{-03}$	$1.34 \pm 1.34e^{+01}$
			3	$3.62 \pm 23.60e^{-04}$	$4.96 \pm 20.80e^{-04}$	$2.58 \pm 5.66e^{-03}$	$6.20 \pm 7.67e^{-03}$	$1.50 \pm 1.50e^{+01}$
			4	$4.74 \pm 31.80e^{-04}$	$3.59 \pm 17.70e^{-04}$	$2.65 \pm 6.59e^{-03}$	$5.98 \pm 7.14e^{-03}$	$1.51 \pm 1.51e^{+01}$
	agglomerative	5	1	$2.23 \pm 6.83e^{-04}$	$4.31 \pm 20.60e^{-04}$	$2.12 \pm 3.78e^{-03}$	$5.24 \pm 4.56e^{-03}$	$1.19 \pm 1.19e^{+01}$
			2	$3.36 \pm 15.40e^{-04}$	$2.71 \pm 4.99e^{-04}$	$2.25 \pm 3.58e^{-03}$	$4.58 \pm 3.23e^{-03}$	$1.34 \pm 1.34e^{+01}$
			3	$2.42 \pm 6.45e^{-04}$	$2.89 \pm 6.47e^{-04}$	$1.86 \pm 2.56e^{-03}$	$4.20 \pm 3.17e^{-03}$	$1.18 \pm 1.18e^{+01}$
			4	$3.61 \pm 15.10e^{-04}$	$3.18 \pm 9.15e^{-04}$	$1.86 \pm 2.92e^{-03}$	$4.14 \pm 1.61e^{-03}$	$1.24 \pm 1.24e^{+01}$
		10	1	$4.95 \pm 28.20e^{-04}$	$3.24 \pm 11.40e^{-04}$	$2.22 \pm 3.40e^{-03}$	$4.91 \pm 4.36e^{-03}$	$1.35 \pm 1.35e^{+01}$
			2	$2.97 \pm 11.30e^{-04}$	$4.20 \pm 14.90e^{-04}$	$2.19 \pm 3.41e^{-03}$	$4.69 \pm 4.13e^{-03}$	$1.33 \pm 1.33e^{+01}$
			3	$3.30 \pm 20.20e^{-04}$	$3.55 \pm 12.40e^{-04}$	$1.75 \pm 1.92e^{-03}$	$4.12 \pm 2.54e^{-03}$	$1.21 \pm 1.21e^{+01}$
			4	$2.72 \pm 8.29e^{-04}$	$3.88 \pm 17.40e^{-04}$	$2.00 \pm 3.58e^{-03}$	$4.43 \pm 3.77e^{-03}$	$1.44 \pm 1.44e^{+01}$
		15	1	$2.28 \pm 8.77e^{-04}$	$4.34 \pm 19.80e^{-04}$	$2.84 \pm 5.04e^{-03}$	$6.38 \pm 6.76e^{-03}$	$1.46 \pm 1.46e^{+01}$
			2	$1.98 \pm 2.07e^{-04}$	$3.83 \pm 14.60e^{-04}$	$2.49 \pm 4.69e^{-03}$	$5.56 \pm 5.64e^{-03}$	$1.33 \pm 1.33e^{+01}$
			3	$4.41 \pm 26.90e^{-04}$	$4.08 \pm 14.00e^{-04}$	$2.70 \pm 5.46e^{-03}$	$5.18 \pm 4.92e^{-03}$	$1.39 \pm 1.39e^{+01}$
			4	$5.46 \pm 35.10e^{-04}$	$5.32 \pm 20.60e^{-04}$	$2.58 \pm 5.25e^{-03}$	$5.87 \pm 7.23e^{-03}$	$1.61 \pm 1.61e^{+01}$
	DBSCAN	∅	1	$3.85 \pm 27.20e^{-04}$	$4.21 \pm 19.20e^{-04}$	$2.75 \pm 8.48e^{-03}$	$5.08 \pm 8.29e^{-03}$	$1.39 \pm 1.39e^{+01}$
			2	$9.13 \pm 70.40e^{-04}$	$3.08 \pm 11.70e^{-04}$	$2.92 \pm 9.26e^{-03}$	$5.59 \pm 8.42e^{-03}$	$1.63 \pm 1.63e^{+01}$
			3	$3.67 \pm 19.50e^{-04}$	$3.81 \pm 26.00e^{-04}$	$2.67 \pm 7.82e^{-03}$	$7.78 \pm 13.60e^{-03}$	$1.43 \pm 1.43e^{+01}$
			4	$4.17 \pm 38.80e^{-04}$	$4.97 \pm 22.40e^{-04}$	$1.86 \pm 4.02e^{-03}$	$1.35 \pm 3.58e^{-02}$	$1.63 \pm 1.63e^{+01}$
MC	∅	∅	$4.24 \pm 21.40e^{-04}$	$4.52 \pm 21.30e^{-04}$	$2.28 \pm 3.86e^{-03}$	$6.94 \pm 6.34e^{-03}$	$1.52 \pm 4.36e^{+01}$	

TABLEAU C.3 – Résultats des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ du modèle de transport

N	méthode	k	m	$Err'(\mathcal{S}_1)$	$Err'(\mathcal{S}_2)$	$Err'(\mathcal{S}_3)$	$Err'(\mathcal{S}_4)$
50	K-means	5	1	$2.31 \pm 1.47e^{-02}$	$9.10 \pm 10.40e^{-03}$	$2.40 \pm 1.15e^{-02}$	$9.57 \pm 6.81e^{-03}$
			2	$3.44 \pm 1.78e^{-02}$	$4.22 \pm 2.75e^{-03}$	$3.63 \pm 2.04e^{-02}$	$7.80 \pm 6.92e^{-03}$
			3	$3.87 \pm 2.39e^{-02}$	$6.35 \pm 2.60e^{-03}$	$3.66 \pm 1.74e^{-02}$	$1.13 \pm 2.01e^{-02}$
			4	$4.94 \pm 3.53e^{-02}$	$5.77 \pm 3.48e^{-04}$	$4.99 \pm 2.72e^{-02}$	$6.80 \pm 9.52e^{-03}$
		10	1	$2.91 \pm 2.03e^{-02}$	$2.58 \pm 0.60e^{-02}$	$2.65 \pm 1.75e^{-02}$	$1.15 \pm 0.75e^{-02}$
			2	$4.15 \pm 2.71e^{-02}$	$1.39 \pm 1.48e^{-02}$	$3.82 \pm 2.01e^{-02}$	$6.01 \pm 8.95e^{-03}$
			3	$4.91 \pm 2.63e^{-02}$	$1.71 \pm 2.70e^{-02}$	$5.86 \pm 3.44e^{-02}$	$8.98 \pm 10.70e^{-03}$
			4	$6.97 \pm 3.59e^{-02}$	$8.07 \pm 4.59e^{-03}$	$6.64 \pm 3.49e^{-02}$	$5.63 \pm 8.09e^{-03}$
		15	1	$1.66 \pm 1.43e^{-02}$	$2.37 \pm 0.99e^{-02}$	$1.83 \pm 1.36e^{-02}$	$1.74 \pm 1.69e^{-02}$
			2	$1.51 \pm 1.39e^{-02}$	$1.44 \pm 0.82e^{-02}$	$1.52 \pm 1.28e^{-02}$	$1.76 \pm 1.08e^{-02}$
			3	$1.44 \pm 1.45e^{-02}$	$2.60 \pm 1.49e^{-02}$	$1.55 \pm 1.25e^{-02}$	$1.96 \pm 1.46e^{-02}$
			4	$1.38 \pm 1.28e^{-02}$	$2.59 \pm 0.81e^{-02}$	$1.66 \pm 2.03e^{-02}$	$2.27 \pm 1.45e^{-02}$
	K-medoids	5	1	$3.22 \pm 2.57e^{-02}$	$8.97 \pm 4.83e^{-03}$	$3.92 \pm 2.04e^{-02}$	$7.28 \pm 12.10e^{-03}$
			2	$5.47 \pm 3.12e^{-02}$	$5.08 \pm 5.50e^{-03}$	$4.89 \pm 2.28e^{-02}$	$8.59 \pm 14.10e^{-03}$
			3	$7.02 \pm 3.45e^{-02}$	$2.89 \pm 2.38e^{-03}$	$6.58 \pm 2.41e^{-02}$	$5.13 \pm 6.82e^{-03}$
			4	$7.29 \pm 2.20e^{-02}$	$3.25 \pm 3.50e^{-02}$	$7.75 \pm 2.06e^{-02}$	$7.69 \pm 17.00e^{-03}$
		10	1	$3.47 \pm 2.94e^{-02}$	$9.10 \pm 4.42e^{-03}$	$4.14 \pm 3.43e^{-02}$	$1.01 \pm 0.96e^{-02}$
			2	$5.41 \pm 4.13e^{-02}$	$1.04 \pm 0.80e^{-02}$	$7.68 \pm 5.00e^{-02}$	$8.94 \pm 11.40e^{-03}$
			3	$8.31 \pm 4.82e^{-02}$	$1.30 \pm 1.44e^{-02}$	$7.96 \pm 3.14e^{-02}$	$1.04 \pm 1.57e^{-02}$
			4	$9.00 \pm 4.53e^{-02}$	$7.10 \pm 6.82e^{-03}$	$1.05 \pm 0.46e^{-01}$	$1.72 \pm 2.81e^{-02}$
		15	1	$1.51 \pm 1.28e^{-02}$	$1.56 \pm 1.08e^{-02}$	$1.94 \pm 1.30e^{-02}$	$1.96 \pm 0.98e^{-02}$
			2	$1.69 \pm 1.71e^{-02}$	$1.98 \pm 1.24e^{-02}$	$1.79 \pm 1.56e^{-02}$	$2.31 \pm 1.58e^{-02}$
			3	$1.59 \pm 1.53e^{-02}$	$2.17 \pm 1.05e^{-02}$	$1.50 \pm 1.47e^{-02}$	$2.12 \pm 1.06e^{-02}$
			4	$1.41 \pm 1.45e^{-02}$	$3.74 \pm 2.75e^{-02}$	$1.40 \pm 1.29e^{-02}$	$2.04 \pm 1.58e^{-02}$
	agglomerative	5	1	$2.59 \pm 1.55e^{-02}$	<i>nan</i>	$2.49 \pm 1.56e^{-02}$	$1.27 \pm 0.97e^{-02}$
			2	$3.51 \pm 2.14e^{-02}$	$1.90 \pm 1.17e^{-02}$	$3.27 \pm 1.62e^{-02}$	$1.07 \pm 1.10e^{-02}$
			3	$4.20 \pm 2.58e^{-02}$	$1.11 \pm 0.19e^{-02}$	$3.63 \pm 1.89e^{-02}$	$8.97 \pm 8.03e^{-03}$
			4	$4.05 \pm 2.19e^{-02}$	$1.17 \pm 0.78e^{-02}$	$4.56 \pm 2.60e^{-02}$	$3.53 \pm 2.84e^{-03}$
		10	1	$2.56 \pm 1.89e^{-02}$	$2.64 \pm 1.32e^{-02}$	$2.66 \pm 1.98e^{-02}$	$1.14 \pm 0.98e^{-02}$
			2	$3.75 \pm 2.43e^{-02}$	$7.31 \pm 6.28e^{-03}$	$4.56 \pm 2.59e^{-02}$	$1.09 \pm 1.48e^{-02}$
			3	$5.11 \pm 3.33e^{-02}$	$6.01 \pm 0.00e^{-03}$	$5.34 \pm 3.57e^{-02}$	$7.24 \pm 9.58e^{-03}$
			4	$7.70 \pm 4.12e^{-02}$	$2.02 \pm 1.67e^{-02}$	$7.13 \pm 3.31e^{-02}$	$8.47 \pm 10.60e^{-03}$
		15	1	$1.73 \pm 1.27e^{-02}$	$2.48 \pm 1.00e^{-02}$	$1.93 \pm 1.17e^{-02}$	$1.95 \pm 0.91e^{-02}$
			2	$1.52 \pm 1.27e^{-02}$	$2.80 \pm 0.74e^{-02}$	$1.60 \pm 1.27e^{-02}$	$2.21 \pm 1.10e^{-02}$
			3	$1.74 \pm 1.35e^{-02}$	$4.19 \pm 0.53e^{-02}$	$1.59 \pm 1.20e^{-02}$	$2.12 \pm 1.30e^{-02}$
			4	$1.63 \pm 1.52e^{-02}$	$2.62 \pm 1.68e^{-02}$	$1.48 \pm 1.31e^{-02}$	$2.39 \pm 1.46e^{-02}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$2.04 \pm 2.84e^{-02}$	$2.43 \pm 1.29e^{-02}$	$1.66 \pm 2.83e^{-02}$	$2.38 \pm 3.82e^{-02}$
			2	$1.20 \pm 1.63e^{-02}$	$3.18 \pm 2.57e^{-02}$	$1.47 \pm 2.29e^{-02}$	$3.38 \pm 2.73e^{-02}$
			3	$1.32 \pm 1.83e^{-02}$	$5.43 \pm 1.80e^{-02}$	$1.31 \pm 1.91e^{-02}$	$3.62 \pm 3.57e^{-02}$
			4	$1.27 \pm 1.73e^{-02}$	$3.73 \pm 1.76e^{-02}$	$1.37 \pm 1.95e^{-02}$	$3.16 \pm 2.53e^{-02}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.68 \pm 0.89e^{-02}$	$1.98 \pm 0.00e^{-02}$	$1.86 \pm 0.86e^{-02}$	$1.89 \pm 0.00e^{-02}$

TABLEAU C.4 – Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ du modèle de transport

N	méthode	k	m	$Err'(S_5)$	$Err'(S_6)$	$Err'(S_7)$	$Err'(S_8)$	$Err'(\$)$
50	K-means	5	1	$1.48 \pm 0.57e^{-02}$	$9.50 \pm 5.50e^{-03}$	$1.25 \pm 1.04e^{-02}$	$8.27 \pm 8.23e^{-03}$	$2.02 \pm 4.76e^{+01}$
			2	$1.26 \pm 0.80e^{-02}$	$6.92 \pm 7.67e^{-03}$	$6.96 \pm 7.95e^{-03}$	$5.54 \pm 7.63e^{-03}$	$2.16 \pm 4.94e^{+01}$
			3	$6.18 \pm 4.74e^{-03}$	$4.60 \pm 3.50e^{-03}$	$8.66 \pm 11.30e^{-03}$	$4.05 \pm 4.13e^{-03}$	$1.80 \pm 3.04e^{+01}$
			4	$5.22 \pm 3.31e^{-03}$	$3.74 \pm 4.34e^{-03}$	$4.35 \pm 5.18e^{-03}$	$3.79 \pm 4.49e^{-03}$	$2.15 \pm 3.14e^{+01}$
		10	1	$9.53 \pm 7.96e^{-03}$	$1.40 \pm 1.10e^{-02}$	$7.30 \pm 6.43e^{-03}$	$6.12 \pm 8.56e^{-03}$	$1.94 \pm 4.50e^{+01}$
			2	$1.44 \pm 0.99e^{-02}$	$3.17 \pm 3.17e^{-03}$	$8.29 \pm 13.20e^{-03}$	$4.59 \pm 6.00e^{-03}$	$2.09 \pm 5.80e^{+01}$
			3	$9.89 \pm 10.00e^{-03}$	$2.23 \pm 2.98e^{-03}$	$6.70 \pm 12.80e^{-03}$	$3.95 \pm 5.00e^{-03}$	$2.23 \pm 6.53e^{+01}$
			4	$5.28 \pm 5.55e^{-03}$	$2.74 \pm 3.82e^{-03}$	$7.72 \pm 13.20e^{-03}$	$4.18 \pm 5.24e^{-03}$	$2.07 \pm 4.57e^{+01}$
		15	1	$2.31 \pm 0.33e^{-02}$	$1.50 \pm 1.10e^{-02}$	$2.01 \pm 1.00e^{-02}$	$1.05 \pm 1.06e^{-02}$	$2.46 \pm 6.94e^{+01}$
			2	$2.91 \pm 1.82e^{-02}$	$7.36 \pm 7.56e^{-03}$	$1.85 \pm 1.25e^{-02}$	$8.90 \pm 10.20e^{-03}$	$2.22 \pm 6.75e^{+01}$
			3	$1.77 \pm 1.21e^{-02}$	$9.83 \pm 9.73e^{-03}$	$2.03 \pm 1.22e^{-02}$	$6.61 \pm 8.39e^{-03}$	$2.45 \pm 8.06e^{+01}$
			4	$1.73 \pm 0.92e^{-02}$	$1.34 \pm 1.42e^{-02}$	$2.98 \pm 2.29e^{-02}$	$7.03 \pm 9.36e^{-03}$	$2.52 \pm 8.03e^{+01}$
	K-medoids	5	1	$1.01 \pm 1.24e^{-02}$	$7.24 \pm 6.16e^{-03}$	$8.06 \pm 7.21e^{-03}$	$6.42 \pm 7.84e^{-03}$	$2.54 \pm 6.71e^{+01}$
			2	$8.64 \pm 6.68e^{-03}$	$1.83 \pm 1.55e^{-03}$	$7.28 \pm 9.18e^{-03}$	$4.77 \pm 7.04e^{-03}$	$2.13 \pm 4.70e^{+01}$
			3	$1.11 \pm 0.85e^{-02}$	$2.20 \pm 2.56e^{-03}$	$5.17 \pm 10.10e^{-03}$	$4.47 \pm 5.41e^{-03}$	$1.96 \pm 3.50e^{+01}$
			4	$1.47 \pm 1.97e^{-02}$	$3.04 \pm 4.69e^{-03}$	$9.17 \pm 16.50e^{-03}$	$4.50 \pm 5.76e^{-03}$	$2.95 \pm 10.90e^{+01}$
		10	1	$1.18 \pm 0.66e^{-02}$	$6.64 \pm 4.39e^{-03}$	$7.82 \pm 11.00e^{-03}$	$5.17 \pm 6.93e^{-03}$	$2.26 \pm 5.37e^{+01}$
			2	$1.05 \pm 1.18e^{-02}$	$5.83 \pm 9.42e^{-03}$	$8.09 \pm 14.20e^{-03}$	$5.68 \pm 9.67e^{-03}$	$2.38 \pm 5.66e^{+01}$
			3	$5.76 \pm 6.04e^{-03}$	$4.60 \pm 9.78e^{-03}$	$9.00 \pm 19.90e^{-03}$	$4.85 \pm 7.39e^{-03}$	$2.51 \pm 7.87e^{+01}$
			4	$1.48 \pm 1.78e^{-02}$	$4.75 \pm 5.73e^{-03}$	$7.31 \pm 12.50e^{-03}$	$6.36 \pm 13.10e^{-03}$	$2.66 \pm 8.16e^{+01}$
		15	1	$2.15 \pm 0.59e^{-02}$	$9.78 \pm 5.87e^{-03}$	$1.94 \pm 1.26e^{-02}$	$1.20 \pm 1.05e^{-02}$	$2.10 \pm 4.80e^{+01}$
			2	$1.08 \pm 0.33e^{-02}$	$1.11 \pm 0.95e^{-02}$	$2.00 \pm 1.43e^{-02}$	$9.24 \pm 10.20e^{-03}$	$2.32 \pm 6.61e^{+01}$
			3	$2.91 \pm 0.99e^{-02}$	$7.19 \pm 7.82e^{-03}$	$1.91 \pm 1.45e^{-02}$	$8.91 \pm 11.50e^{-03}$	$2.24 \pm 6.57e^{+01}$
			4	$2.88 \pm 1.42e^{-02}$	$6.68 \pm 10.10e^{-03}$	$2.53 \pm 1.81e^{-02}$	$7.72 \pm 10.00e^{-03}$	$2.36 \pm 9.08e^{+01}$
	agglomerative	5	1	$1.38 \pm 0.00e^{-02}$	$1.24 \pm 0.98e^{-02}$	$1.41 \pm 1.09e^{-02}$	$7.30 \pm 7.99e^{-03}$	$1.61 \pm 2.14e^{+01}$
			2	$9.91 \pm 8.03e^{-03}$	$3.24 \pm 2.27e^{-03}$	$9.74 \pm 8.46e^{-03}$	$5.02 \pm 5.74e^{-03}$	$2.20 \pm 4.90e^{+01}$
			3	$7.24 \pm 2.36e^{-03}$	$2.41 \pm 2.85e^{-03}$	$8.48 \pm 8.17e^{-03}$	$3.78 \pm 5.86e^{-03}$	$2.02 \pm 3.63e^{+01}$
			4	$8.75 \pm 6.45e^{-03}$	$5.95 \pm 3.90e^{-03}$	$6.99 \pm 9.42e^{-03}$	$3.51 \pm 2.98e^{-03}$	$2.38 \pm 4.92e^{+01}$
		10	1	$1.93 \pm 1.17e^{-02}$	$9.12 \pm 5.50e^{-03}$	$1.10 \pm 0.78e^{-02}$	$6.10 \pm 7.65e^{-03}$	$2.40 \pm 7.13e^{+01}$
			2	$7.93 \pm 5.70e^{-03}$	$5.55 \pm 5.55e^{-03}$	$9.81 \pm 8.29e^{-03}$	$5.06 \pm 6.10e^{-03}$	$2.16 \pm 4.77e^{+01}$
			3	$1.79 \pm 1.41e^{-02}$	$4.80 \pm 5.56e^{-03}$	$5.09 \pm 5.83e^{-03}$	$3.84 \pm 3.67e^{-03}$	$2.07 \pm 5.20e^{+01}$
			4	$6.16 \pm 3.73e^{-03}$	$3.63 \pm 7.01e^{-03}$	$5.85 \pm 9.29e^{-03}$	$4.47 \pm 5.04e^{-03}$	$2.40 \pm 6.66e^{+01}$
		15	1	$1.98 \pm 0.00e^{-02}$	$1.37 \pm 0.80e^{-02}$	$1.79 \pm 0.75e^{-02}$	$1.16 \pm 1.13e^{-02}$	$2.30 \pm 5.19e^{+01}$
			2	$4.81 \pm 0.00e^{-03}$	$8.52 \pm 6.21e^{-03}$	$1.99 \pm 0.85e^{-02}$	$7.53 \pm 8.85e^{-03}$	$2.11 \pm 5.18e^{+01}$
			3	$1.82 \pm 1.40e^{-02}$	$6.57 \pm 5.14e^{-03}$	$1.97 \pm 1.13e^{-02}$	$6.28 \pm 7.43e^{-03}$	$2.25 \pm 6.73e^{+01}$
			4	$2.57 \pm 1.55e^{-02}$	$8.51 \pm 6.77e^{-03}$	$1.79 \pm 1.23e^{-02}$	$7.17 \pm 9.69e^{-03}$	$2.60 \pm 8.67e^{+01}$
	DBSCAN	$\emptyset$	1	$1.24 \pm 1.77e^{-02}$	$5.88 \pm 8.47e^{-03}$	$1.76 \pm 2.57e^{-02}$	$6.01 \pm 12.60e^{-03}$	$2.05 \pm 6.50e^{+01}$
			2	$4.55 \pm 3.29e^{-02}$	$2.19 \pm 5.09e^{-03}$	$3.32 \pm 3.00e^{-02}$	$6.48 \pm 11.00e^{-03}$	$2.82 \pm 12.10e^{+01}$
			3	$1.50 \pm 0.99e^{-02}$	$3.25 \pm 10.80e^{-03}$	$2.91 \pm 2.57e^{-02}$	$9.89 \pm 16.90e^{-03}$	$2.00 \pm 7.26e^{+01}$
			4	$5.74 \pm 2.24e^{-02}$	$4.21 \pm 7.53e^{-03}$	$1.85 \pm 1.98e^{-02}$	$1.94 \pm 4.50e^{-02}$	$2.45 \pm 10.10e^{+01}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.98 \pm 0.00e^{-02}$	$1.98 \pm 0.00e^{-02}$	$1.94 \pm 0.41e^{-02}$	$1.85 \pm 0.76e^{-02}$	$2.76 \pm 6.88e^{+01}$

TABLEAU C.5 – Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathcal{S}$ du modèle de transport

Annexe D

Résultats de l'extension probabiliste

D.1 Taux de détection

N	méthode	k	m	$\overline{B}(S_1)$	$\overline{B}(S_2)$	$\overline{B}(S_3)$	$\overline{B}_3(S)$
50	Fuzzy c-means	5	1	0.235	0.354	1.000	0.098
			2	0.213	0.156	1.000	0.031
			3	0.147	0.096	1.000	0.009
			4	0.069	0.085	1.000	0.002
		10	1	0.258	0.373	1.000	0.094
			2	0.237	0.270	1.000	0.063
			3	0.180	0.248	1.000	0.038
			4	0.111	0.279	1.000	0.025
		15	1	0.247	0.444	1.000	0.115
			2	0.216	0.311	1.000	0.073
			3	0.219	0.350	1.000	0.072
			4	0.144	0.331	1.000	0.041
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	0.222	0.469	1.000	0.107

TABLEAU D.1 – Résultats des taux de détection obtenus sur le modèle de proies prédateurs en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$\overline{B}(S_1)$	$\overline{B}(S_2)$	$\overline{B}(S)$
50	Fuzzy c-means	5	1	0.054	1.000	0.054
			2	0.019	1.000	0.019
			3	0.003	1.000	0.003
			4	0.001	1.000	0.001
		10	1	0.087	1.000	0.087
			2	0.064	1.000	0.064
			3	0.043	1.000	0.043
			4	0.021	1.000	0.021
		15	1	0.104	1.000	0.104
			2	0.075	1.000	0.075
			3	0.055	1.000	0.055
			4	0.044	1.000	0.044
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	0.117	1.000	0.117

TABLEAU D.2 – Résultats des taux de détection obtenus sur le modèle de virus en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$\bar{B}(S_1)$	$\bar{B}(S_2)$	$\bar{B}(S_3)$	$\bar{B}(S_4)$	$\bar{B}(S_5)$	$\bar{B}(S_6)$	$\bar{B}(S_7)$	$\bar{B}(S_8)$	$\bar{B}_2(S)$
50	Fuzzy c-means	5	1	0.278	0.008	0.186	0.068	0.008	0.016	0.068	0.260	0.214
			2	0.300	0.020	0.238	0.060	0.008	0.028	0.064	0.326	0.264
			3	0.326	0.008	0.246	0.066	0.008	0.024	0.060	0.334	0.298
			4	0.386	0.010	0.240	0.050	0.004	0.034	0.048	0.364	0.320
		10	1	0.276	0.006	0.204	0.058	0.014	0.018	0.072	0.218	0.198
			2	0.262	0.010	0.240	0.082	0.012	0.008	0.074	0.328	0.278
			3	0.252	0.012	0.220	0.064	0.002	0.028	0.072	0.366	0.270
			4	0.286	0.006	0.224	0.062	0.008	0.022	0.048	0.342	0.262
		15	1	0.260	0.004	0.214	0.060	0.012	0.020	0.052	0.260	0.204
			2	0.256	0.010	0.188	0.066	0.008	0.014	0.070	0.274	0.210
			3	0.268	0.012	0.180	0.058	0.008	0.010	0.056	0.246	0.188
			4	0.236	0.010	0.208	0.048	0.008	0.018	0.066	0.268	0.200
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	0.268	0.022	0.198	0.054	0.012	0.012	0.046	0.182	0.162

TABLEAU D.3 – Résultats des taux de détection obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

D.2 Erreurs

N	méthode	k	m	$Err(S_1)$	$Err(S_2)$	$Err(S_3)$	$Err(S)$
50	Fuzzy c-means	5	1	$7.53 \pm 6.37e^{-03}$	$1.21 \pm 0.59e^{-02}$	$1.51 \pm 0.89e^{-02}$	$2.32 \pm 1.26e^{+00}$
			2	$7.43 \pm 5.36e^{-03}$	$1.44 \pm 1.04e^{-02}$	$1.70 \pm 1.13e^{-02}$	$2.48 \pm 1.25e^{+00}$
			3	$6.35 \pm 4.30e^{-03}$	$1.30 \pm 0.58e^{-02}$	$1.69 \pm 0.70e^{-02}$	$2.18 \pm 0.89e^{+00}$
			4	$5.64 \pm 1.90e^{-03}$	$1.35 \pm 0.63e^{-02}$	$1.78 \pm 0.63e^{-02}$	$2.09 \pm 0.60e^{+00}$
		10	1	$8.56 \pm 7.77e^{-03}$	$1.22 \pm 0.74e^{-02}$	$1.56 \pm 1.08e^{-02}$	$2.51 \pm 1.55e^{+00}$
			2	$8.08 \pm 6.49e^{-03}$	$1.46 \pm 0.98e^{-02}$	$1.69 \pm 1.16e^{-02}$	$2.62 \pm 1.40e^{+00}$
			3	$6.89 \pm 5.73e^{-03}$	$1.28 \pm 0.71e^{-02}$	$1.62 \pm 0.86e^{-02}$	$2.26 \pm 1.17e^{+00}$
			4	$6.37 \pm 4.50e^{-03}$	$1.26 \pm 0.71e^{-02}$	$1.59 \pm 0.80e^{-02}$	$2.15 \pm 1.00e^{+00}$
		15	1	$8.19 \pm 7.29e^{-03}$	$1.20 \pm 0.86e^{-02}$	$1.53 \pm 1.06e^{-02}$	$2.43 \pm 1.44e^{+00}$
			2	$8.04 \pm 6.73e^{-03}$	$1.46 \pm 0.98e^{-02}$	$1.76 \pm 1.17e^{-02}$	$2.61 \pm 1.42e^{+00}$
			3	$7.24 \pm 6.65e^{-03}$	$1.25 \pm 0.83e^{-02}$	$1.55 \pm 1.04e^{-02}$	$2.30 \pm 1.38e^{+00}$
			4	$6.59 \pm 5.60e^{-03}$	$1.24 \pm 0.80e^{-02}$	$1.55 \pm 0.89e^{-02}$	$2.18 \pm 1.18e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$8.12 \pm 5.86e^{-03}$	$1.34 \pm 0.83e^{-02}$	$1.47 \pm 1.22e^{-02}$	$2.53 \pm 1.26e^{+00}$

TABLEAU D.4 – Résultats des erreurs obtenus sur le modèle de proies prédateurs en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(S_3)$	$Err'(S)$
50	Fuzzy c-means	5	1	$1.39 \pm 1.09e^{-02}$	$1.11 \pm 0.98e^{-02}$	$1.51 \pm 0.89e^{-02}$	$3.05 \pm 2.40e^{+00}$
			2	$1.43 \pm 0.87e^{-02}$	$2.36 \pm 2.44e^{-02}$	$1.70 \pm 1.13e^{-02}$	$3.55 \pm 2.17e^{+00}$
			3	$1.08 \pm 1.01e^{-02}$	$1.56 \pm 1.86e^{-02}$	$1.69 \pm 0.70e^{-02}$	$2.66 \pm 1.17e^{+00}$
			4	$6.49 \pm 7.18e^{-03}$	$2.23 \pm 1.95e^{-02}$	$1.78 \pm 0.63e^{-02}$	$3.82 \pm 1.95e^{+00}$
		10	1	$1.72 \pm 1.16e^{-02}$	$1.13 \pm 1.21e^{-02}$	$1.56 \pm 1.08e^{-02}$	$4.08 \pm 2.64e^{+00}$
			2	$1.62 \pm 0.96e^{-02}$	$1.99 \pm 1.79e^{-02}$	$1.69 \pm 1.16e^{-02}$	$4.25 \pm 2.30e^{+00}$
			3	$1.29 \pm 1.18e^{-02}$	$1.30 \pm 1.42e^{-02}$	$1.62 \pm 0.86e^{-02}$	$3.67 \pm 2.41e^{+00}$
			4	$1.27 \pm 1.17e^{-02}$	$1.23 \pm 1.35e^{-02}$	$1.59 \pm 0.80e^{-02}$	$3.16 \pm 2.39e^{+00}$
		15	1	$1.61 \pm 1.14e^{-02}$	$1.13 \pm 1.28e^{-02}$	$1.53 \pm 1.06e^{-02}$	$3.75 \pm 2.26e^{+00}$
			2	$1.70 \pm 1.04e^{-02}$	$1.90 \pm 1.67e^{-02}$	$1.76 \pm 1.17e^{-02}$	$4.51 \pm 2.38e^{+00}$
			3	$1.32 \pm 1.25e^{-02}$	$1.22 \pm 1.40e^{-02}$	$1.55 \pm 1.04e^{-02}$	$3.50 \pm 2.88e^{+00}$
			4	$1.26 \pm 1.32e^{-02}$	$1.20 \pm 1.40e^{-02}$	$1.55 \pm 0.89e^{-02}$	$2.93 \pm 2.96e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.70 \pm 0.72e^{-02}$	$1.43 \pm 1.21e^{-02}$	$1.47 \pm 1.22e^{-02}$	$4.24 \pm 1.54e^{+00}$

TABLEAU D.5 – Résultats des erreurs sans échec obtenus sur le modèle de proies prédateurs en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$Err(S_1)$	$Err(S_2)$	$Err(S)$
50	Fuzzy c-means	5	1	$3.28 \pm 3.47e^{-03}$	$3.28 \pm 3.47e^{-03}$	$1.30 \pm 1.38e^{+00}$
			2	$2.85 \pm 2.88e^{-03}$	$2.85 \pm 2.88e^{-03}$	$1.13 \pm 1.14e^{+00}$
			3	$2.68 \pm 3.81e^{-03}$	$2.68 \pm 3.81e^{-03}$	$1.06 \pm 1.51e^{+00}$
			4	$2.53 \pm 0.15e^{-03}$	$2.53 \pm 0.15e^{-03}$	$1.00 \pm 0.06e^{+00}$
		10	1	$3.82 \pm 5.02e^{-03}$	$3.82 \pm 5.02e^{-03}$	$1.52 \pm 2.00e^{+00}$
			2	$4.14 \pm 8.18e^{-03}$	$4.14 \pm 8.18e^{-03}$	$1.65 \pm 3.25e^{+00}$
			3	$3.80 \pm 7.36e^{-03}$	$3.80 \pm 7.36e^{-03}$	$1.51 \pm 2.92e^{+00}$
			4	$3.09 \pm 4.66e^{-03}$	$3.09 \pm 4.66e^{-03}$	$1.23 \pm 1.85e^{+00}$
		15	1	$3.98 \pm 4.91e^{-03}$	$3.98 \pm 4.91e^{-03}$	$1.58 \pm 1.95e^{+00}$
			2	$4.00 \pm 6.16e^{-03}$	$4.00 \pm 6.16e^{-03}$	$1.59 \pm 2.45e^{+00}$
			3	$3.71 \pm 5.92e^{-03}$	$3.71 \pm 5.92e^{-03}$	$1.47 \pm 2.35e^{+00}$
			4	$3.66 \pm 6.01e^{-03}$	$3.66 \pm 6.01e^{-03}$	$1.46 \pm 2.39e^{+00}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$4.41 \pm 5.44e^{-03}$	$4.41 \pm 5.44e^{-03}$	$1.75 \pm 2.16e^{+00}$

TABLEAU D.6 – Résultats des erreurs obtenus sur le modèle de virus en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$Err'(S_1)$	$Err'(S_2)$	$Err'(S)$
50	Fuzzy c-means	5	1	$1.64 \pm 0.63e^{-02}$	$3.28 \pm 3.47e^{-03}$	$6.53 \pm 2.50e^{+00}$
			2	$1.95 \pm 1.24e^{-02}$	$2.85 \pm 2.88e^{-03}$	$7.74 \pm 4.94e^{+00}$
			3	$5.33 \pm 4.77e^{-02}$	$2.68 \pm 3.81e^{-03}$	$2.12 \pm 1.89e^{+01}$
			4	$7.32 \pm 0.00e^{-03}$	$2.53 \pm 0.15e^{-03}$	$2.91 \pm 0.00e^{+00}$
		10	1	$1.74 \pm 0.93e^{-02}$	$3.82 \pm 5.02e^{-03}$	$6.92 \pm 3.71e^{+00}$
			2	$2.78 \pm 2.11e^{-02}$	$4.14 \pm 8.18e^{-03}$	$1.11 \pm 0.84e^{+01}$
			3	$3.21 \pm 2.05e^{-02}$	$3.80 \pm 7.36e^{-03}$	$1.28 \pm 0.81e^{+01}$
			4	$2.93 \pm 1.82e^{-02}$	$3.09 \pm 4.66e^{-03}$	$1.16 \pm 0.72e^{+01}$
		15	1	$1.65 \pm 0.75e^{-02}$	$3.98 \pm 4.91e^{-03}$	$6.57 \pm 2.97e^{+00}$
			2	$2.22 \pm 1.22e^{-02}$	$4.00 \pm 6.16e^{-03}$	$8.82 \pm 4.83e^{+00}$
			3	$2.40 \pm 1.42e^{-02}$	$3.71 \pm 5.92e^{-03}$	$9.54 \pm 5.62e^{+00}$
			4	$2.84 \pm 1.34e^{-02}$	$3.66 \pm 6.01e^{-03}$	$1.13 \pm 0.53e^{+01}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.87 \pm 0.47e^{-02}$	$4.41 \pm 5.44e^{-03}$	$7.42 \pm 1.88e^{+00}$

TABLEAU D.7 – Résultats des erreurs sans échec obtenus sur le modèle de virus en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$Err(S_1)$	$Err(S_2)$	$Err(S_3)$	$Err(S_4)$
50	Fuzzy c-means	5	1	$9.98 \pm 8.27e^{-03}$	$3.55 \pm 14.40e^{-04}$	$7.11 \pm 6.06e^{-03}$	$2.29 \pm 4.65e^{-03}$
			2	$9.65 \pm 7.07e^{-03}$	$7.83 \pm 41.00e^{-04}$	$7.22 \pm 6.12e^{-03}$	$2.40 \pm 5.34e^{-03}$
			3	$1.00 \pm 0.77e^{-02}$	$4.37 \pm 24.30e^{-04}$	$7.98 \pm 7.86e^{-03}$	$2.53 \pm 6.27e^{-03}$
			4	$9.98 \pm 8.77e^{-03}$	$4.65 \pm 23.80e^{-04}$	$6.80 \pm 5.67e^{-03}$	$2.10 \pm 5.37e^{-03}$
		10	1	$9.60 \pm 7.52e^{-03}$	$3.20 \pm 12.80e^{-04}$	$7.48 \pm 7.06e^{-03}$	$2.15 \pm 4.56e^{-03}$
			2	$9.39 \pm 7.27e^{-03}$	$4.99 \pm 28.40e^{-04}$	$7.68 \pm 8.13e^{-03}$	$2.59 \pm 5.46e^{-03}$
			3	$9.71 \pm 9.09e^{-03}$	$4.32 \pm 22.20e^{-04}$	$7.33 \pm 7.30e^{-03}$	$2.45 \pm 6.14e^{-03}$
			4	$8.62 \pm 6.23e^{-03}$	$3.83 \pm 20.00e^{-04}$	$7.14 \pm 6.32e^{-03}$	$2.38 \pm 5.32e^{-03}$
		15	1	$9.70 \pm 8.32e^{-03}$	$3.12 \pm 13.20e^{-04}$	$7.76 \pm 7.85e^{-03}$	$2.25 \pm 4.83e^{-03}$
			2	$9.98 \pm 8.65e^{-03}$	$3.98 \pm 18.60e^{-04}$	$7.18 \pm 7.74e^{-03}$	$2.46 \pm 5.60e^{-03}$
			3	$9.68 \pm 8.31e^{-03}$	$4.74 \pm 25.80e^{-04}$	$7.32 \pm 7.83e^{-03}$	$2.34 \pm 6.27e^{-03}$
			4	$9.73 \pm 8.53e^{-03}$	$3.99 \pm 19.00e^{-04}$	$7.62 \pm 8.11e^{-03}$	$2.15 \pm 5.32e^{-03}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$9.57 \pm 6.35e^{-03}$	$6.59 \pm 28.70e^{-04}$	$7.54 \pm 6.70e^{-03}$	$2.10 \pm 4.00e^{-03}$

TABLEAU D.8 – Résultats des erreurs pour les solutions $S_1, \dots, S_4$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$Err(\mathcal{S}_5)$	$Err(\mathcal{S}_6)$	$Err(\mathcal{S}_7)$	$Err(\mathcal{S}_8)$	$Err(\mathbb{S})$
50	Fuzzy c-means	5	1	$3.39 \pm 18.40e^{-04}$	$4.46 \pm 20.50e^{-04}$	$2.67 \pm 4.92e^{-03}$	$6.12 \pm 5.20e^{-03}$	$1.36 \pm 1.36e^{+01}$
			2	$3.43 \pm 19.20e^{-04}$	$5.16 \pm 22.20e^{-04}$	$2.81 \pm 5.76e^{-03}$	$6.18 \pm 5.82e^{-03}$	$1.60 \pm 1.60e^{+01}$
			3	$3.60 \pm 20.20e^{-04}$	$4.90 \pm 20.60e^{-04}$	$2.50 \pm 4.77e^{-03}$	$6.02 \pm 5.51e^{-03}$	$1.45 \pm 1.45e^{+01}$
			4	$2.93 \pm 17.00e^{-04}$	$4.85 \pm 16.40e^{-04}$	$2.59 \pm 6.09e^{-03}$	$7.69 \pm 10.90e^{-03}$	$1.41 \pm 1.41e^{+01}$
		10	1	$4.76 \pm 25.20e^{-04}$	$4.75 \pm 20.80e^{-04}$	$2.67 \pm 4.77e^{-03}$	$6.16 \pm 5.37e^{-03}$	$1.42 \pm 1.42e^{+01}$
			2	$4.80 \pm 27.00e^{-04}$	$2.77 \pm 8.19e^{-04}$	$2.77 \pm 5.26e^{-03}$	$6.21 \pm 6.55e^{-03}$	$1.45 \pm 1.45e^{+01}$
			3	$2.36 \pm 10.60e^{-04}$	$4.46 \pm 18.00e^{-04}$	$3.12 \pm 6.93e^{-03}$	$5.87 \pm 5.86e^{-03}$	$1.38 \pm 1.38e^{+01}$
			4	$3.49 \pm 19.20e^{-04}$	$4.74 \pm 21.50e^{-04}$	$2.22 \pm 3.74e^{-03}$	$5.48 \pm 5.19e^{-03}$	$1.33 \pm 1.33e^{+01}$
		15	1	$4.14 \pm 22.90e^{-04}$	$5.64 \pm 28.20e^{-04}$	$2.30 \pm 4.01e^{-03}$	$6.49 \pm 5.85e^{-03}$	$1.42 \pm 1.42e^{+01}$
			2	$3.10 \pm 14.90e^{-04}$	$3.63 \pm 13.10e^{-04}$	$2.72 \pm 5.23e^{-03}$	$6.85 \pm 7.92e^{-03}$	$1.36 \pm 1.36e^{+01}$
			3	$3.50 \pm 20.00e^{-04}$	$3.42 \pm 14.20e^{-04}$	$2.51 \pm 5.30e^{-03}$	$6.12 \pm 5.75e^{-03}$	$1.36 \pm 1.36e^{+01}$
			4	$4.81 \pm 34.00e^{-04}$	$4.07 \pm 15.30e^{-04}$	$2.54 \pm 4.77e^{-03}$	$6.29 \pm 5.90e^{-03}$	$1.42 \pm 1.42e^{+01}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$4.24 \pm 21.40e^{-04}$	$4.52 \pm 21.30e^{-04}$	$2.28 \pm 3.86e^{-03}$	$6.94 \pm 6.34e^{-03}$	$1.52 \pm 4.36e^{+01}$

TABLEAU D.9 – Résultats des erreurs pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$Err'(\mathcal{S}_1)$	$Err'(\mathcal{S}_2)$	$Err'(\mathcal{S}_3)$	$Err'(\mathcal{S}_4)$
50	Fuzzy c-means	5	1	$1.79 \pm 1.26e^{-02}$	$1.60 \pm 0.33e^{-02}$	$1.72 \pm 0.85e^{-02}$	$1.80 \pm 0.72e^{-02}$
			2	$1.60 \pm 1.04e^{-02}$	$2.79 \pm 0.93e^{-02}$	$1.50 \pm 0.89e^{-02}$	$2.20 \pm 0.81e^{-02}$
			3	$1.64 \pm 1.11e^{-02}$	$2.63 \pm 0.79e^{-02}$	$1.77 \pm 1.12e^{-02}$	$2.22 \pm 1.35e^{-02}$
			4	$1.48 \pm 1.27e^{-02}$	$2.39 \pm 0.39e^{-02}$	$1.31 \pm 0.90e^{-02}$	$2.04 \pm 1.50e^{-02}$
		10	1	$1.66 \pm 1.17e^{-02}$	$1.54 \pm 0.66e^{-02}$	$1.79 \pm 1.04e^{-02}$	$1.85 \pm 0.86e^{-02}$
			2	$1.63 \pm 1.17e^{-02}$	$2.73 \pm 0.90e^{-02}$	$1.68 \pm 1.29e^{-02}$	$1.88 \pm 0.88e^{-02}$
			3	$1.80 \pm 1.54e^{-02}$	$1.72 \pm 1.12e^{-02}$	$1.63 \pm 1.18e^{-02}$	$2.15 \pm 1.41e^{-02}$
			4	$1.29 \pm 1.05e^{-02}$	$2.60 \pm 0.20e^{-02}$	$1.52 \pm 0.97e^{-02}$	$2.11 \pm 0.90e^{-02}$
		15	1	$1.76 \pm 1.35e^{-02}$	$2.12 \pm 0.00e^{-02}$	$1.86 \pm 1.17e^{-02}$	$1.96 \pm 0.82e^{-02}$
			2	$1.89 \pm 1.36e^{-02}$	$1.72 \pm 0.78e^{-02}$	$1.75 \pm 1.37e^{-02}$	$2.11 \pm 1.01e^{-02}$
			3	$1.72 \pm 1.34e^{-02}$	$2.07 \pm 1.19e^{-02}$	$1.88 \pm 1.34e^{-02}$	$2.18 \pm 1.66e^{-02}$
			4	$1.88 \pm 1.41e^{-02}$	$1.73 \pm 0.86e^{-02}$	$1.84 \pm 1.30e^{-02}$	$2.21 \pm 1.31e^{-02}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.68 \pm 0.89e^{-02}$	$1.98 \pm 0.00e^{-02}$	$1.86 \pm 0.86e^{-02}$	$1.89 \pm 0.00e^{-02}$

TABLEAU D.10 – Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_4$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

N	méthode	k	m	$Err'(\mathcal{S}_5)$	$Err'(\mathcal{S}_6)$	$Err'(\mathcal{S}_7)$	$Err'(\mathcal{S}_8)$	$Err'(\mathbb{S})$
50	Fuzzy c-means	5	1	$1.90 \pm 0.86e^{-02}$	$1.45 \pm 0.78e^{-02}$	$1.92 \pm 0.78e^{-02}$	$1.11 \pm 0.84e^{-02}$	$2.59 \pm 6.46e^{+01}$
			2	$1.96 \pm 0.94e^{-02}$	$1.09 \pm 0.81e^{-02}$	$2.25 \pm 1.01e^{-02}$	$9.92 \pm 9.11e^{-03}$	$2.55 \pm 6.97e^{+01}$
			3	$2.16 \pm 0.74e^{-02}$	$1.16 \pm 0.71e^{-02}$	$1.89 \pm 0.97e^{-02}$	$9.31 \pm 8.65e^{-03}$	$2.47 \pm 6.86e^{+01}$
			4	$2.62 \pm 0.71e^{-02}$	$8.09 \pm 4.43e^{-03}$	$2.50 \pm 1.56e^{-02}$	$1.35 \pm 1.65e^{-02}$	$1.98 \pm 4.57e^{+01}$
		10	1	$2.07 \pm 0.61e^{-02}$	$1.45 \pm 0.63e^{-02}$	$1.83 \pm 0.74e^{-02}$	$1.26 \pm 0.89e^{-02}$	$2.12 \pm 5.29e^{+01}$
			2	$2.44 \pm 0.51e^{-02}$	$7.68 \pm 5.34e^{-03}$	$1.92 \pm 0.92e^{-02}$	$9.98 \pm 10.50e^{-03}$	$2.46 \pm 6.82e^{+01}$
			3	$2.40 \pm 0.00e^{-02}$	$8.39 \pm 7.13e^{-03}$	$2.45 \pm 1.32e^{-02}$	$8.48 \pm 9.11e^{-03}$	$2.26 \pm 6.29e^{+01}$
			4	$2.02 \pm 0.78e^{-02}$	$1.19 \pm 0.87e^{-02}$	$1.74 \pm 0.70e^{-02}$	$7.61 \pm 8.48e^{-03}$	$2.09 \pm 5.83e^{+01}$
		15	1	$1.90 \pm 0.93e^{-02}$	$1.76 \pm 1.01e^{-02}$	$1.77 \pm 0.77e^{-02}$	$1.25 \pm 0.91e^{-02}$	$2.36 \pm 5.95e^{+01}$
			2	$1.53 \pm 0.70e^{-02}$	$1.06 \pm 0.41e^{-02}$	$1.95 \pm 0.94e^{-02}$	$1.34 \pm 1.30e^{-02}$	$2.53 \pm 5.93e^{+01}$
			3	$2.03 \pm 0.98e^{-02}$	$1.27 \pm 0.69e^{-02}$	$2.02 \pm 1.31e^{-02}$	$1.15 \pm 0.98e^{-02}$	$2.50 \pm 6.22e^{+01}$
			4	$3.68 \pm 1.10e^{-02}$	$1.08 \pm 0.45e^{-02}$	$1.78 \pm 0.97e^{-02}$	$1.15 \pm 0.96e^{-02}$	$3.01 \pm 8.80e^{+01}$
	MC	$\emptyset$	$\emptyset$	$1.98 \pm 0.00e^{-02}$	$1.98 \pm 0.00e^{-02}$	$1.94 \pm 0.41e^{-02}$	$1.85 \pm 0.76e^{-02}$	$2.76 \pm 6.88e^{+01}$

TABLEAU D.11 – Résultats des erreurs sans échec pour les solutions $\mathcal{S}_5, \dots, \mathcal{S}_8$ et $\mathbb{S}$ obtenus sur le modèle de transport en utilisant Fuzzy c-means. (Jeu de paramètres de base)

Bibliographie

- [1] C. C. AGGARWAL et C. K. REDDY, éd., *Data Clustering : Algorithms and Applications*. Chapman et Hall/CRC Press, 2013.
- [2] D. ARTHUR et S. VASSILVITSKII, « k-means++ : The advantages of careful seeding », Stanford, rapp. tech., 2006.
- [3] R. AXELROD, « Agent-based modeling as a bridge between disciplines », *Handbook of computational economics*, t. 2, p. 1565-1584, 2006.
- [4] J. BANKS, J. CARSON II, B. NELSON et D. NICOL, *Discrete-event system simulation*, 5th. Pearson, 2010.
- [5] J. BEZDEK, *Pattern Recognition With Fuzzy Objective Function Algorithms*. jan. 1981, ISBN : 978-1-4757-0452-5. DOI : 10.1007/978-1-4757-0450-1.
- [6] E. BONABEAU, « Agent-based modeling : Methods and techniques for simulating human systems », *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 99, n° 3, p. 7280-7287, 2002.
- [7] F. BONNEFOY, F. HAUDIN, G. MICHEL, B. SEMIN, T. HUMBERT, S. AUMAITRE, M. BERHANU et E. FALCON, « Observation expérimentale en bassin à vagues des interactions résonantes à quatre ondes », *La Houille Blanche*, n° 5, p. 56-63, 2017.
- [8] O. BRANDOUY, P. MATHIEU et I. VERYZHENKO, « On the design of agent-based artificial stock markets », in *International Conference on Agents and Artificial Intelligence*, Springer, 2011, p. 350-364.
- [9] B. CAMUS, T. PARIS, J. VAUBOURG, Y. PRESSE, C. BOURJOT, L. CIARLETTA et V. CHEVRIER, « Co-simulation of cyber-physical systems using a DEVS wrapping strategy in the MECSYCO middleware », *Simulation*, t. 94, n° 12, p. 1099-1127, 2018.
- [10] B. CAMUS, « Environnement Multi-agent pour la Multi-modélisation et Simulation des Systemes Complexes », thèse de doct., Université de Lorraine, 2015.
- [11] F. CHOLLET. (2015). Keras. <https://github.com/fchollet/keras>.

- [12] R. CONT, « La statistique face aux événements rares », 2009.
- [13] J. CROTTY, « Structural causes of the global financial crisis : a critical assessment of the ‘new financial architecture’ », *Cambridge journal of economics*, t. 33, n° 4, p. 563-580, 2009.
- [14] M. CUTURI et M. BLONDEL, « Soft-dtw : a differentiable loss function for time-series », in *International Conference on Machine Learning*, PMLR, 2017, p. 894-903.
- [15] T. DENOËUX, « NN-EVCLUS : Neural Network-based Evidential Clustering », *arXiv preprint arXiv :2009.12795*, 2020.
- [16] T. DENOËUX et M.-H. MASSON, « EVCLUS : evidential clustering of proximity data », *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, t. 34, n° 1, p. 95-109, 2004.
- [17] J. DERVEEUW, « Market Dynamics and Agents Behaviors : a Computational Approach », in *Artificial Economics, Agent-Based Methods in Finance, Game Theory and Their Applications*, sér. Lecture Notes in Economics and Mathematical System, t. 564, Springer Berlin Heidelberg, 2006, p. 15-26.
- [18] C. DOTY-HUMPHREY, *Practically Random*, 2019. adresse : <https://sourceforge.net/projects/pracrand>.
- [19] W. DOWDLE, « Influenza pandemic periodicity, virus recycling, and the art of risk assessment », *Emerging infectious diseases*, t. 12, n° 1, p. 34, 2006.
- [20] J. C. DUNN, « A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters », 1973.
- [21] J. EPSTEIN et R. AKTELL, *Growing Artificial Societies*. MIT Press, 1996.
- [22] M. ESTER, H.-P. KRIEGEL, J. SANDER et X. XU, « A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise », in *2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-96)*, 1996, p. 226-231.
- [23] J. FERBER, *Les systèmes multi-agents : vers une intelligence collective*, sér. I.I.A. Informatique intelligence artificielle. InterEditions, 1995, ISBN : 9782729605728. adresse : <https://books.google.fr/books?id=R7VBAAAACAAJ>.
- [24] J. FERBER, F. MICHEL et J. BÀEZ-BARRANCO, « AGRE : Integrating Environments with Organizations », in *Post-proceedings of the First International Workshop on Environments for Multiagent Systems*, 2005.
- [25] J. FERBER et J.-P. MÜLLER, « Influences and reaction : a model of situated multiagent systems », in *2nd International Conference on Multi-agent systems (ICMAS'96)*, 1996, p. 72-79.

- [26] J.-B. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822.
- [27] K. FUKUNAGA et L. D. HOSTETLER, « The Estimation of the Gradient of a Density Function, with Applications in Pattern Recognition », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 21, n° 1, p. 32-40, 1975.
- [28] I. GOODFELLOW, Y. BENGIO et A. COURVILLE, *Deep learning*. MIT press Cambridge, 2016.
- [29] A. GRIGNARD, P. TAILLANDIER, B. GAUDOU, D. VO, N. HUYNH et A. DROGOUL, « GAMA 1.6 : Advancing the Art of Complex Agent-Based Modeling and Simulation », in *PRIMA 2013 : Principles and Practice of Multi-Agent Systems*, sér. LNCS, t. 8291, Springer, 2013, p. 117-131.
- [30] J. HOLLAND, « Genetic algorithms », *Scientific american*, t. 267, n° 1, p. 66-73, 1992.
- [31] H. HOTELLING, « Analysis of a complex of statistical variables into principal components », *Journal of Educational Psychology*, t. 24, n° 6, p. 417-441, 1933.
- [32] Y.-L. HUANG, G. MORVAN, F. PICHON et D. MERCIER, « Détection d'événements rares dans les simulations multi-agents », in *Actes des 26èmes Journées Francophones sur les Systèmes Multi-Agents (JFSMA)*, 2018.
- [33] ———, « SPSC : a new execution policy for exploring discrete-time stochastic simulations », in *International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems*, 2019, p. 568-575.
- [34] A. K. JAIN, M. N. MURTY et P. J. FLYNN, « Data clustering : a review », *ACM Computing Surveys*, t. 31, n° 3, p. 264-323, 1999.
- [35] H. KAHN et T. HARRIS, « Estimation of particle transmission by random sampling », *National Bureau of Standards applied mathematics series*, t. 12, p. 27-30, 1951.
- [36] S. KALSI. (2018). K-Medoids. <https://github.com/SachinKalsi/kmedoids>.
- [37] W. KERMACK et A. MCKENDRICK, « A contribution to the mathematical theory of epidemics », *Proc. R. Soc. Lond. A*, t. 115, n° 772, p. 700-721, 1927.
- [38] A. KESTING, M. TREIBER et D. HELBING, « General lane-changing model MOBIL for car-following models », *Transportation Research Record*, t. 1999, n° 1, p. 86-94, 2007.
- [39] Y. KUBERA, P. MATHIEU et S. PICAULT, « IODA : an interaction-oriented approach for multi-agent based simulations », *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, t. 23, n° 3, p. 303-343, 2011.

- [40] P. L'ECUYER, F. LE GLAND, P. LEZAUD et B. TUFFIN, « Splitting Techniques », in *Rare Event Simulation using Monte Carlo Methods*, Wiley, 2009.
- [41] P. L'ECUYER, M. MANDJES et B. TUFFIN, « Importance sampling and rare event simulation », in *Rare event simulation using Monte Carlo methods*, Wiley, 2009, p. 17-38.
- [42] P. L'ECUYER et R. SIMARD, « TestU01 : AC library for empirical testing of random number generators », *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, t. 33, n° 4, p. 1-40, 2007.
- [43] T. LEE et W. JETZ, « Unravelling the structure of species extinction risk for predictive conservation science », *Proceedings of the Royal Society B : Biological Sciences*, t. 278, n° 1710, p. 1329-1338, 2011.
- [44] S. LUKE, C. CIOFFI-REVILLA, L. PANAIT, K. SULLIVAN et G. BALAN, « MASON : A Multiagent Simulation Environment », *Simulation*, t. 81, n° 7, p. 517-527, 2005.
- [45] S. MALLAT, *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier, 1999.
- [46] F. MARANZANA, « On the location of supply points to minimize transport costs », *Journal of the Operational Research Society*, t. 15, n° 3, p. 261-270, 1964.
- [47] S. MARINO, I. B. HOGUE, C. J. RAY et D. E. KIRSCHNER, « A methodology for performing global uncertainty and sensitivity analysis in systems biology », *Journal of theoretical biology*, t. 254, n° 1, p. 178-196, 2008.
- [48] G. MARSAGLIA, « Xorshift rngs », *Journal of Statistical Software*, t. 8, n° 14, p. 1-6, 2003.
- [49] M.-H. MASSON et T. DENOEU, « ECM : An evidential version of the fuzzy c-means algorithm », *Pattern Recognition*, t. 41, n° 4, p. 1384-1397, 2008.
- [50] P. MATHIEU et Y. SECQ, « Environment updating and agent scheduling policies in agent-based simulators », in *Proceedings of ICAART'12*, 2012.
- [51] M. MATSUMOTO et T. NISHIMURA, « Mersenne twister : a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator », *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, t. 8, n° 1, p. 3-30, 1998.
- [52] N. METROPOLIS et S. ULAM, « The Monte Carlo method », *Journal of the American statistical association*, t. 44, n° 247, p. 335-341, 1949.
- [53] F. MICHEL, « The IRM4S model : the influence/reaction principle for multiagent based simulation », in *Proc. of 6th Int. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, 2007, p. 1-3.

- [54] —, « Le modèle IRM4S. De l'utilisation des notions d'influence et de réaction pour la simulation de systèmes multi-agents », *RIA*, t. 21, p. 757-779, 2007.
- [55] F. MICHEL, G. BEURIER et J. FERBER, « The turtlekit simulation platform : Application to multi-level emergence », in *Agent Based Simulation 4*, 2003.
- [56] —, « The TurtleKit Simulation Platform : Application to Complex Systems », in *Proceedings of the First International Conference on Signal-Image Technology and Internet Based Systems*, 2005, p. 122-127.
- [57] F. MICHEL, A. GOUAÏCH et J. FERBER, « Weak Interaction and Strong Interaction in Agent Based Simulations », in *Multi-Agent-Based Simulation III*, sér. LNCS, t. 2927, Springer, 2003, p. 43-56.
- [58] G. MORVAN et Y. KUBERA, « On time and consistency in multi-agent-based simulations », *Corr*, t. arXiv :1703.02399, 2017.
- [59] G. MORVAN, A. VEREMME et D. DUPONT, « IRM4MLS : the influence reaction model for multi-level simulation », in *Multi-Agent-Based Simulation XI*, sér. LNCS, t. 6532, Springer, 2011, p. 16-27.
- [60] J.-P. MÜLLER, « Towards a Formal Semantics of Event-Based Multi-agent Simulations », in *Multi-Agent-Based Simulation IX*, sér. LNCS, N. DAVID et J. SICHMAN, éd., t. 5269, Springer, 2009, p. 110-126.
- [61] F. MURTAGH et P. LEGENDRE, « Ward's hierarchical agglomerative clustering method : which algorithms implement Ward's criterion ? », *Journal of classification*, t. 31, n° 3, p. 274-295, 2014.
- [62] H. PARUNAK, « "Go to the ant" : Engineering principles from natural multi-agent systems », *Annals of Operations Research*, t. 75, p. 69-101, 1997.
- [63] L. PASSERA et S. ARON, *Les fourmis : comportement, organisation sociale et évolution*. NRC Research Press, 2005.
- [64] F. PEDREGOSA, G. VAROQUAUX, A. GRAMFORT, V. MICHEL, B. THIRION, O. GRISEL, M. BLONDEL, P. PRETTENHOFER, R. WEISS, V. DUBOURG, J. VANDERPLAS, A. PASSOS, D. COURNAPEAU, M. BRUCHER, M. PERROT et E. DUCHESNAY, « Scikit-learn : Machine Learning in Python », *Journal of Machine Learning Research*, t. 12, p. 2825-2830, 2011.
- [65] S. PICAULT, Y.-L. HUANG, V. SICARD, S. ARNOUX, G. BEAUNÉE et P. EZANNO, « EMULSION : transparent and flexible multiscale stochastic models in epidemiology », *PLOS Computational Biology*, t. 15, n° 9, e1007342, 2019.

- [66] S. PICAULT, Y.-L. HUANG, V. SICARD et P. EZANNO, « Enhancing Sustainability of Complex Epidemiological Models through a Generic Multilevel Agent-based Approach », in *Proc. of 26th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, 2017.
- [67] S. PICAULT et P. MATHIEU, « An Interaction-Oriented Model for Multi-Scale Simulation », in *Proc of the 22nd Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, AAAI Press, 2011, p. 332-337.
- [68] R. REUILLON, M. LECLAIRE et S. REY-COYREHOURCQ, « OpenMOLE, a workflow engine specifically tailored for the distributed exploration of simulation models », *Future Generation Computer Systems*, t. 29, n° 8, p. 1981-1990, 2013.
- [69] T. J. ROSS et al., *Fuzzy logic with engineering applications*. Wiley Online Library, 2004, t. 2.
- [70] P. J. ROUSSEEUW, « Silhouettes : a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis », *Journal of computational and applied mathematics*, t. 20, p. 53-65, 1987.
- [71] G. RUBINO, B. TUFFIN et al., *Rare event simulation using Monte Carlo methods*. Wiley Online Library, 2009, t. 73.
- [72] D. E. RUMELHART, G. E. HINTON et R. J. WILLIAMS, « Learning internal representations by error propagation », California Univ San Diego La Jolla Inst for Cognitive Science, rapp. tech., 1985.
- [73] H. SAKOE et S. CHIBA, « Dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition », *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, t. 26, n° 1, p. 43-49, 1978.
- [74] E. SCHUBERT, J. SANDER, M. ESTER, H. P. KRIEGEL et X. XU, « DBSCAN revisited, revisited : why and how you should (still) use DBSCAN », *ACM Transactions on Database Systems (TODS)*, t. 42, n° 3, p. 1-21, 2017.
- [75] J.-B. SOYEZ, G. MORVAN, R. MERZOUKI et D. DUPONT, « Multilevel Agent-Based Modeling of System of Systems », *IEEE Systems Journal*, t. 11, n° 4, p. 2084-2095, 2017.
- [76] T. STRATULAT, J. FERBER et J. TRANIER, « MASQ-Towards an Integral Approach to Agent-Based Interaction », in *AAMAS'09 : The Eighth International Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems*, 2009, p. 8.
- [77] R. TAVENARD, *tslearn : A machine learning toolkit dedicated to time-series data*, <https://github.com/rtavenar/tslearn>, 2017.

- [78] R. TIBSHIRANI, G. WALTHER et T. HASTIE, « Estimating the number of clusters in a data set via the gap statistic », *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, t. 63, n° 2, p. 411-423, 2001.
- [79] J.-C. TORREL, C. LATTAUD et J.-C. HEUDIN, « Complex Systems in Cosmology : "The Antennae" Case Study », in *Complex Sciences*, sér. LNICST, t. 5, Springer, 2009, p. 1887-1897.
- [80] M. TREIBER, A. HENNECKE et D. HELBING, « Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations », *Physical review E*, t. 62, n° 2, p. 1805, 2000.
- [81] S. VIGNA, « An experimental exploration of Marsaglia's xorshift generators, scrambled », *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, t. 42, n° 4, p. 1-23, 2016.
- [82] ———, « Further scramblings of Marsaglia's xorshift generators », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, t. 315, p. 175-181, 2017.
- [83] M. VILLÉN-ALTAMIRANO et J. VILLÉN-ALTAMIRANO, « RESTART : a straightforward method for fast simulation of rare events », in *Proc. of the Winter Simulation Conf. (WSC)*, 1994, p. 282-289.
- [84] C. VOGEL, *Computational methods for inverse problems*. SIAM, 2002.
- [85] D. WEYNS, A. OMICINI et J. ODELL, « Environment as a first class abstraction in multiagent systems », *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, t. 14, p. 5-30, 2007.
- [86] U. WILENSKY. (). NetLogo Virus model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Virus>, Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University. Evanston, IL.
- [87] ———, « Center for connected learning and computer-based modeling », in *NetLogo*, Northwestern University, 1999.
- [88] E. WINSBERG, « Computer Simulations in Science », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. ZALTA, éd., Winter 2019, Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.
- [89] M. WOOLDRIDGE, *An Introduction to MultiAgent Systems*, 2nd revised edition. John Wiley & Sons, 2009.

